ISSN 2683-3263

AITIAS

REVISTA DE ESTUDIOS FILOSÓFICOS

Volúmen II Número 3 Enero -Junio 2022

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Centro
Estudios
Humanísticos

D.R. 2022 © *Aitías*. Revista de Estudios Filosóficos, **Vol. 2, No. 3, enero-junio 2022**, es una **publicación semestral** editada por la Universidad Autónoma de Nuevo León, a través del Centro de Estudios Humanísticos, Biblioteca Universitaria Raúl Rangel Frías, Piso 1, Avenida Alfonso Reyes #4000 Norte, Colonia Regina, Monterrey, Nuevo León, México. C.P. 64290. Tel.+52 (81)83-29- 4000 Ext. 6533. https://aitias.uanl.mx Editor Responsable: Dr. José Luis Cisneros Arellano. Reserva de Derechos al Uso Exclusivo **04-2022-020214040400-102**, **ISSN 2683-3263**, ambos ante el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Responsable de la última actualización de este número: Centro de Estudios Humanísticos de la UANL, Mtro. Juan José Muñoz Mendoza, Biblioteca Universitaria Raúl Rangel Frías, Piso 1, Avenida Alfonso Reyes #4000 Norte, Colonia Regina, Monterrey, Nuevo León, México. C.P. 64290. **Fecha de última modificación de 01 julio de 2022**.

Coordinadores del Dossier: "Los horizontes de la lógica y su filosofía. La diversificación de esquemas y tipos de argumentos en contextos de incertidumbre" / Dr. Jesús Jasso Méndez (UNAM / UACM), México, Dr. José Luis Cisneros Arellano (UANL), Nuevo León.

Autores
Dr. Dmitry Zaitsev
Dr. Hubert Marraud
Dr. Franklin Galindo
Dr. Randy Alzate
Dr. Otávio Bueno
Dr. Raymundo Morado
Dr. Omer Buatu Batubenge
Dr. Juan Carlos Hernández Pineda
Dr. Luis César Santiesteban Baca

Este es un producto del Centro de Estudios Humanísticos de la Universidad Autónoma de Nuevo León. www.ceh.uanl.mx

Hecho en México

Aitías

Revista de Estudios Filosóficos
http://aitias.uanl.mx/

El axioma de elección en el quehacer matemático contemporáneo

The axiom of choice in contemporary mathematical work

Franklin Galindo
https://orcid.org/0000-0002-0760-4566

Randy Alzate
https://orcid.org/0000-0002-5190-8305
Universidad Central de Venezuela
Municipio Libertador,Caracas, Dtto. Capital, Venezuela

Editor: José Luis Cisneros Arellano Dr., Universidad Autónoma de Nuevo León, Centro de Estudios Humanísticos, Monterrey, Nuevo León, México.

DOI: https://doi.org/10.29105/aitias2.3-31
Recepción: 11-05-22
Fecha Aceptación: 14-06-22
Email: franklingalindo178@gmail.com,
a3error@hotmail.com

El axioma de elección en el quehacer matemático contemporáneo

Resumen: Para matemáticos interesados en problemas de fundamentos, lógico-matemáticos y filósofos de la matemática, el axioma de elección es centro obligado de reflexión, pues ha sido considerado esencial en el debate dentro de las posiciones consideradas clásicas en filosofía de la matemática (intuicionismo, formalismo, logicismo, platonismo), pero también ha tenido una presencia fundamental para el desarrollo de la matemática y metamatemática contemporánea. Desde una posición que privilegia el quehacer matemático, nos proponemos mostrar los aportes que ha tenido el axioma en varias áreas fundamentales de la matemática, su aplicación en la lógica de primer orden, así como una breve descripción de las pruebas de consistencia relativa debidas a Gödel y Cohen, las cuales establecieron su independencia del sistema axiomático Zermelo-Fraenkel (ZF). Con todo lo anterior mostraremos cómo el quehacer matemático contemporáneo se adscribe al platonismo matemático en los términos de Bernays y Ferreirós. Revisaremos también los argumentos de Zermelo y Cantor para permitir el uso de asunciones en la matemática, los cuales se acercan a los planteamientos de la investigación científica y esbozan relaciones con la filosofía de la práctica matemática. Finalmente, justificamos el uso del axioma de elección en la contemporaneidad, abogando por unas relaciones de equidad entre la matemática y la filosofía, presentando además su plena vigencia, a través de la referencia a algunos problemas abiertos en la actualidad que vinculan el axioma de elección con la teoría de Ramsey.

Palabras Clave: Axioma de elección, quehacer matemático, Gödel, Cohen, platonismo matemático.

The axiom of choice in contemporary mathematical work

Abstract: For mathematicians interested in problems of foundations, logical-mathematicians and philosophers of mathematics, the axiom of choice is an obligatory center of reflection, since it has been considered essential in the debate within the positions considered classic in the philosophy of mathematics (intuitionism, formalism, logicism, platonism), but it has also had a fundamental presence in the development of contemporary mathematics and metamathematics. From a position that privileges the mathematical task, we intend to show the contributions that the axiom has had in several fundamental areas of mathematics, its application in first-order logic, as well as a brief description of the relative consistency tests due to Gödel and Cohen, who established their independence from the Zermelo-Fraenkel (ZF) axiomatic system. With all of the above, we will show how contemporary mathematical work is ascribed to mathematical platonism in the terms of Bernays and Ferreirós. We will also review the arguments of Zermelo and Cantor to allow the use of assumptions in mathematics, which are close to the approaches of scientific research and outline relationships with the philosophy of mathematical practice. Finally, we justify the use of the axiom of choice in contemporary times, advocating for equitable relations between mathematics and philosophy, also presenting its full validity, through reference to some currently open problems that link the axiom of choice with Ramsey theory.

Keywords: axiom of choice, mathematical work, Gödel, Cohen, mathematical platonism

Introducción

El axioma de elección[1] ha representado para la comunidad matemática interesada en problemas de fundamentos así como la de filósofos de la matemática, el ejemplo por excelencia de un enunciado cuya clasificación como *axioma* estuvo en sus inicios rodeada de debate y polémica. En efecto, connotados matemáticos indicaron que considerarlo un axioma implicaba legitimar su uso para la matemática de la época, entrañando varias dificultades, a saber: 1) La justificación de la existencia de un conjunto considerado *no intuitivo*, en el sentido de no expresar una verdad básica o evidente sobre conjuntos; 2) Dicho conjunto es postulado, sin referir un procedimiento efectivo, paso a paso, que permitiese construir al conjunto en cuestión; 3) Su aceptación conlleva algunas consecuencias contrarias al sentido común (paradoja de Banach-Tarski por ejemplo), así como contrarias al modo de hacer matemática de aquel momento, ya que trabajar con entidades matemáticas no construibles se entendía "riesgoso" para la matemática "aceptable".

Estas dificultades son comprendidas siendo colocadas en la época en la que surge el axioma (1904), época de la denominada *crisis de fundamentos* y, sobretodo, época en la que las distintas áreas de las matemáticas (álgebra, análisis, topología, etc.) se encontraban en proceso de consolidación de sus objetos propios de estudio, precisando sus problemas fundamentales y requiriendo del axioma en algunos de sus resultados. Más aún, comenzó a hacerse patente un modo de hacer matemática denominado "abstracto", diferenciándose del modo constructivo hasta entonces utilizado. Ante este panorama era de esperarse la reticencia observada en sus inicios para aceptarlo.

---

1 Existen varias presentaciones del axioma. Una es: Si *K* es una colección de conjuntos no vacíos y K es el conjunto de todos los elementos pertenecientes a los conjuntos de la colección *K* (K = U*K*), entonces existe una aplicación f: *K*→ K tal que, para cada k *K*, f (k) ∈ k. Roberto Torretti, *El paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en la filosofía matemática* (Santiago de Chile: Editorial Universitaria, 1998), 64.

Así, el axioma de elección se encontraba inmerso en un ambiente en el que las distintas áreas de la matemática se abrían camino propio, la metamatemática no aparecía aún, y las posiciones clásicas en filosofía de la matemática (intuicionismo, platonismo, logicismo y formalismo) se consolidaban años después. En consecuencia, matemática, metamatemática y filosofía de la matemática son tres (3) ámbitos que para aquel momento no se encontraban claramente diferenciados, pero en las que el axioma, tal y como el desarrollo histórico lo evidencia, ha tenido y tiene participación, como se mostrará más adelante.

Por supuesto hoy día no existe tal debate, ya que en los referidos ámbitos en términos bien precisos se han definido sus respectivos objetos de estudio, así como sus problemas específicos. En efecto, el axioma de elección es utilizado sin problema alguno por la gran mayoría de los matemáticos contemporáneos si así lo requiriesen, habida cuenta de la demostración metamatemática (Gödel) que legitima su uso y lo pone a disposición sin peligro de contradicción alguna (siempre que ZF sea consistente). Podría suponerse entonces que el debate sobre el axioma de elección está concluido. El matemático podría así decidirlo sin mayor inconveniente, pero desde la filosofía de la matemática y en particular desde una filosofía que valore el recorrido histórico, matemático y metamatemático del axioma de elección, y que tome en consideración los modos de hacer matemática de los matemáticos, según los problemas que aborden (esto es, su práctica matemática cotidiana), se ha considerado conveniente colocar sobre la mesa tanto consideraciones epistemológicas y gnoseológicas sobre el tratamiento y naturaleza de las entidades matemáticas, así como también el estudio sobre la práctica cotidiana del matemático cuando -entre otras actividades- hace cálculos, demostraciones o elabora teorías matemáticas, actividad que englobamos bajo la denominación *quehacer matemático*[2].

2 El término recoge algunas de las características de la actividad del matemático

Esto conllevó una reflexión en primera instancia *desde* la matemática y luego *sobre* ella.

Esta perspectiva de análisis ha sido trabajada por investigadores contemporáneos dentro de lo que se conoce como **filosofía de la práctica matemática** (Mancosu, Kitcher, Maddy, Ferreirós, etc.) y será el lente bajo el cual se darán algunas reflexiones en este artículo. En consecuencia, el recorrido que presentaremos del axioma de elección comenzará en la matemática, continuará en la metamatemática y finalizará en la filosofía, siendo este recorrido cónsono con la perspectiva antes indicada. Con esto no afirmamos que los aspectos matemáticos y filosóficos sigan caminos separados; por el contrario, mostraremos que a lo interno de la matemática existen elementos que permiten la reflexión filosófica.

Al respecto, es oportuno indicar que nuestra investigación considera, siguiendo a Haack, a la filosofía de la matemática como *el estudio de los problemas filosóficos suscitados por la matemática.*[3] Se estudia entonces el quehacer matemático para reflexionar respecto a lo que se puede encontrar dentro de la ciencia matemática, así como observar el tratamiento que se le dan a las entidades matemáticas, junto con las características de la actividad matemática contemporánea. Por lo tanto, el axioma de elección tendrá una mirada matemática, metamatemática y

---

cuando hace matemáticas pero también cuando piensa respecto a ella. En la literatura especializada aparecen términos similares tales como: pensamiento matemático, formas de pensar matemáticamente, modos de hacer matemática, razonamiento matemático, etc. que pudieran confundir al lector y pretender separar el hacer matemático del pensar matemático. En nuestro caso, tanto el hacer como el pensar se considerarán parte del quehacer matemático.

3 "La tarea de la filosofía de la lógica [...] es investigar los problemas filosóficos suscitados por la lógica [...] y la de la filosofía de la matemática [es] investigar los problemas filosóficos suscitados por la matemática." Susan Haack, Filosofía de las lógicas, trads. Amador Antón y Teresa Orduña (Madrid: Ediciones Cátedra, 1991), 21. Algunos problemas propios son: ¿Cuál es la naturaleza de las entidades matemáticas? ¿Cuáles son las leyes que las rigen? ¿Cómo podemos hacer para conocer tales leyes?, etc.

filosófica como camino metodológico de reflexión fundamental, cuya integración dará una visión holística de su papel en los ámbitos en cuestión, y permitirá también sustentar una propuesta de filosofía de la matemática que valore el quehacer matemático, la práctica matemática cotidiana. Este camino considerará varias aristas, a precisarse en el siguiente apartado.

1. *Camino metodológico: Desde la matemática hacia la filosofía*

La investigación sobre la naturaleza de las entidades matemáticas ha sido tradición en la filosofía clásica de la matemática, y en ellas aparece el axioma de elección como una asunción platonista. Ahora bien, consideramos que este modo de filosofar, el cual ha realizado aportes importantes, pudiese restringir miradas más amplias de la naturaleza del objeto matemático, ya que lo estudia individualmente, aislándolo del contexto matemático en el que surge, esto es, sin considerar el quehacer matemático que hace uso de tal o cual entidad matemática, en este caso, del axioma de elección.

Es decir, la reflexión tradicional respecto al axioma (u otras entidades matemáticas) se hace desde la filosofía como rectora de la reflexión, con sus modos de pensar y sopesar de manera crítica lo objeto de su análisis, privilegiando consideraciones epistemológicas, gnoseológicas y ontológicas en su mayor parte. Se tiene entonces una reflexión que va desde la filosofía hacia la matemática y no desde la matemática hacia la filosofía, que es lo que expondremos en este artículo[4]. A nuestro juicio, la perspectiva tradicional podría limitar otras aristas del tema que consideramos pertinente valorizar. Entre ellas, la referida al

4 Esto es fundamental para comprender la presentación que aquí ́haremos. Varios autores han desarrollado aspectos similares: Mancosu (2016), Tymoczko (1997), Maddy (1997), etc.

hecho de que el axioma de elección aparece como necesario en resultados fundamentales en varias áreas de las matemáticas, lo que permite poner en evidencia al platonismo matemático dentro de la matemática, como es de uso corriente en el análisis, álgebra y topología contemporáneos.

Esta presencia del axioma a lo largo de la matemática actual, requerido a tal punto que la gran mayoría de los matemáticos lo consideren indispensable, invita a indagar respecto a su naturaleza particular, pues su presencia no parece accidental sino fundamental para el avance de la matemática contemporánea y, como veremos más adelante, también para la metamatemática. En consecuencia, su estudio se hará no solamente desde las posiciones tradicionales en filosofía de la matemática, sino desde lo inherente a la actividad matemática concreta -que hemos denominado quehacer matemático-.

Esto justifica la referencia que haremos de algunos resultados fundamentales matemáticos en los que el axioma es requerido. De este análisis y desde la perspectiva expresada arriba -que va de la matemática hacia la filosofía- consideramos que surgen elementos que dan sustento a las posiciones del *platonismo matemático* como parte integrante de la actividad matemática concreta contemporánea. Sostenemos que un análisis filosófico adecuado del axioma de elección debe considerar las características particulares de la actividad matemática. No es usual encontrar trabajos en la literatura especializada que atiendan como tema específico al axioma de elección que unan las discusiones matemáticas con las consideraciones filosóficas, de acuerdo con la revisión bibliográfica realizada, considerándose esto un aporte para el ámbito latinoamericano de la filosofía de la matemática.

En el mismo orden de ideas, también describiremos el proceso que conllevó a determinar la independencia del axioma de

elección de la teoría axiomática de conjuntos Zermelo-Fraenkel (ZF). Gracias a las pruebas metamatemáticas de los conjuntos constructibles de Gödel (1938) y el método de construcción de modelos de forcing de Cohen (1963) se poseen procedimientos que son hoy día estándar para resolver problemas de independencia o consistencia relativa[5]. El análisis de estos procedimientos de construcción de modelos se justifica en tanto que todo axioma objeto de análisis pasa en la contemporaneidad necesariamente por pruebas de consistencia relativa. Destaquemos el hecho que tales métodos son considerados platonistas.

Ahora bien, como consecuencia de los resultados de Gödel y Cohen, tanto el axioma de elección como su negación se pueden utilizar sin riesgo de contradicción alguna, verificándose dos matemáticas existentes -una con el axioma, otra sin ella-. Ambas legitimadas, queda la interrogante sobre los posibles criterios para seleccionar a la matemática "adecuada" o si tal pregunta es conveniente. El seleccionar a la que admite al axioma de elección nos llevará a considerar el punto de vista platonista matemático de acuerdo con Bernays y Ferreirós, tomando en consideración los planteamientos de Zermelo respecto al papel de los principios matemáticos para la ciencia y para la filosofía[6]. De igual forma estudiaremos los argumentos esgrimidos contra el axioma y veremos que las posiciones intuicionista y platonista no son incompatibles, privilegiándose la actividad matemática y lo que el matemático necesite para trabajar.

Así, el lector podrá apreciar que el estudio que mostraremos del axioma de elección permitirá englobar el desarrollo concreto del axioma del siguiente modo: 1) Verificando su aparición y

5 También ha sido usado para probar teoremas matemáticos: Robert M. Solovay, "On the cardinality of sets of reals," en *Foundations of Mathematics. Symposium Papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel*, eds. Jack J. Bullof, Thomas C. Holyoke y Samuel W. Hahn (Berlin: Springer, 1969), 58-73.

6 E. Zermelo, "Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I," Mathematische Annalen 65, (June 1908): 261-281.

uso en cuatro áreas claves de las matemáticas: análisis, álgebra, topología y teoría de conjuntos, evidenciando la presencia del platonismo matemático en la matemática; 2) Verificando cómo hace presencia en la metamatemática, determinando en buena medida la división entre la metamatemática finitaria y la infinitaria, y 3) abriendo las compuertas para la aparición de -al menos- dos matemáticas, lo que conlleva discusiones importantes en la filosofía de la matemática. Comenzaremos por mostrar en primer lugar el ambiente predominante en el que surge el axioma.

2. *Axioma de elección: Orígenes*

El axioma de elección hace su aparición en 1904, presentado por Ernst Zermelo, matemático alemán, el cual lo eleva a categoría de axioma, ya que lo consideraba un enunciado usado de manera implícita por los matemáticos. Más aún, a su juicio, "se aplica sin titubeos en el razonamiento matemático."[7] Lo presenta para justificar su demostración del Teorema del Buen Orden, haciéndolo como matemático que es y encontrando oposición principalmente de matemáticos; ahora bien, el contenido del debate generado se fue tornando metamatemático y posteriormente filosófico. Esto se debe a que, como Ferreirós apunta, el axioma de elección es un "caso paradigmático de planteamiento abstracto"[8] refiriéndose con esto a un axioma que evidencia su no constructividad, describiéndose un modo de hacer matemática planteado como "una investigación de relaciones que se dan entre objetos o elementos que se asumen existentes con independencia de nuestro pensamiento."[9] Sobre el axioma de elección recae entonces la

7 E. Zermelo, "Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann," *Mathematische Annalen* 59, (1904): 516.

8 José Ferreirós, "Matemáticas y platonismo(s)," La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 2, no. 3 (1999): 459.

9 Ferreirós, "Matemáticas y platonismo(s)," 450. Esto se corresponde con el término platonismo matemático que asumiremos en este trabajo. Sostenemos, como hipótesis de trabajo, que es adecuado referirse a una filosofía realista de la matemática

discusión entre lo que se construye en matemáticas y lo que se postula, debate que comienza a hacerse vigente en la actividad de matemáticos interesados en problemas de fundamentos.

Queremos advertir el hecho que el axioma emerge y se hace explícito de manera individual, no enmarcado en un sistema axiomático, siendo utilizado para justificar una demostración. Visto así se realza su génesis *dentro de la actividad matemática*. Es decir, apareció como justificación de una demostración -siendo el demostrar la actividad por excelencia del matemático- y, dada su naturaleza no constructiva, se comienza a enfatizar la distinción entre demostraciones constructivas y no constructivas, lo que es uno de los elementos centrales de las discusiones en filosofía de la matemática.

Como se dijo anteriormente, Zermelo refiere que varios matemáticos ya habían usado implícitamente al axioma. En efecto, Cantor en 1895, Borel en 1898 y Russell en 1902 -entre otros- lo usaron en algunas de sus demostraciones[10]. El único que consideró de manera explícita el axioma antes que Zermelo fue el matemático italiano Giuseppe Peano en 1890, juzgándolo inadmisible[11]. Posteriormente, en 1902, otro matemático italiano -Beppo Levi- dejó la cuestión por resolver, indicando que quedaba por realizar su demostración y agregando que si se tienen conjuntos bien ordenados entonces existe el conjunto que postula el axioma[12]. Ninguno de los matemáticos antes mencionados le

---

más que a una filosofía platonista. Algunas revisiones se pueden ver en: Michael Dummet, "El platonismo," en La verdad y otros enigmas, trad. Alfredo Herrera Patiño (México: Fondo de Cultura Económica, 1990), 282 y Ferreirós, "Matemáticas y platonismo(s)."

10 Ellos usaron el axioma de elección numerable, de manera implícita. Véase: Gregory H. Moore, Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence (New York: Springer, 1982), 9.

11 G. Peano, "Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires," Mathematische Annalen 37, (1890): 210.

12 Obsérvese aquí la relación entre el Teorema del Buen orden y el axioma de elección que Zermelo probara años después (son proposiciones equivalentes).

dio el estatus de axioma y, por ende, consideraban natural intentar demostrarlo de manera constructiva. Así, tanto Peano como Levi actuaron acorde con el modo mayoritario de hacer matemática para la época, esto es, construyendo paso a paso las entidades matemáticas necesarias para sus investigaciones. Postular a dichas entidades y averiguar las consecuencias derivadas de ello no era el modo en la que la mayoría de los matemáticos realizaba su actividad para ese período en particular.

Consideramos que esto se debe a que la matemática no había alcanzado el alto nivel de abstracción característico de la teoría de conjuntos cantoriana. La aritmetización del análisis y los avances en topología aún no se habían consolidado. La abstracción y la generalización son dos características que se le adscriben a la matemática[13] y en la contemporaneidad ambos aspectos han alcanzado niveles aún mayores debido al tratamiento que dan, entre otros, al infinito matemático[14]. Pero para el período que estamos considerando -antes de 1904- el tratamiento usual del infinito en el quehacer matemático corresponde al infinito potencial y es solo en los trabajos de Cantor donde se le da rigurosidad matemática al infinito actual.

Ya antes, con la aparición de las geometrías no euclidianas, la matemática comenzaba a "mirarse a sí misma", separando sus objetos de estudio de la realidad física, lo que se puede considerar un avance importante hacia la abstracción completa. El camino establecido por Cantor creó algunas dificultades por el uso, entre otros, del principio de comprensión intuitiva -surgieron las paradojas- que minaron la base de confianza tradicional en las matemáticas, poniendo en cuestión sus alcances; pero también estableciendo una nueva manera de trabajar con los objetos

13 Daniel Solow, The Keys to Advanced Mathematics: Recurrent Themes in Abstract Reasoning (Mansfield, OH: BookMasters, 1995).

14 Considérese la existencia de cardinales inaccesibles, quienes hacen uso in extremis del infinito. De hecho, desde ZFC no puede demostrarse la existencia de cardinales inaccesibles. Thomas Jech, Set Theory (Berlin: Springer-Verlag), 2006.

matemáticos: la platonista. Alrededor del ambiente antes descrito es cuando aparece el axioma de elección.

Es muy posible que Peano rechazara clasificar el enunciado como axioma por no considerar plausible aceptar la existencia de un conjunto sin un procedimiento efectivo que lo construya[15]. Esto va en consonancia con el espíritu del razonar matemático de la época y se confirma por la objeción que años después el mismo Peano le hiciera a Zermelo luego que postulara al axioma de elección, exigiéndole una demostración del mismo. Que este último respondiera que "indemostrabilidad no significa invalidez"[16] y que "en matemática no todo se puede demostrar"[17] muestra dos posiciones respecto al quehacer matemático bien definidas: matemática constructivista -Peano- y la matemática platonista -Zermelo-. Aquí se evidencia cómo el axioma de elección se convierte desde sus orígenes en centro de disputa entre lo que se puede o no hacer en matemáticas, obligando a los matemáticos a comenzar a reflexionar sobre su quehacer, así como asumir posición sobre la existencia o no de ciertas entidades matemáticas y sus posibles justificaciones.

3. *Ontología de las entidades matemáticas: Constructivismo y Platonismo*

Ni en el caso de Peano ni en el de Levi, la aceptación o rechazo del axioma pasaron por razones que no fueran a lo interno de la actividad matemática que habían estado desarrollando. De hecho, las argumentaciones de Zermelo frente a Peano parten del modo en el que él entiende que se debe trabajar la matemática.

15 "But as one cannot apply infinitely many times an arbitrary rule by which one assigns to a class A an individual of this class, a determinate rule is stated here." Moore, Zermelo's Axiom, 5.

16 Torretti, El paraíso de Cantor, 67.

17 Torretti, El paraíso de Cantor, 67.

Como matemáticos que son reflexionan, pero el alcance de sus reflexiones evidencian consideraciones metamatemáticas y filosóficas. Una de ellas, característico de la actividad del matemático, es su capacidad para demostrar. Desde este punto de vista, parecería obvio que si se hace referencia a un objeto matemático, se pida su definición a través de algún procedimiento constructivo. Es interesante observar cómo, años después, Levi, en un libro dedicado a los Elementos de Euclides, apuntara lo siguiente:

> En el lenguaje matemático moderno se hizo frecuentemente cuestión entre proposiciones existenciales y proposiciones constructivas; la distinción se vinculó esencialmente con la llamada aritmetización de la matemática, la cual con Kronecker, Weierstrass, Dedekind, parte del lema de edificar todo el análisis del concepto de número entero, debiendo todo lo demás depender de este por definiciones nominales. Muchas veces esta limitación fue considerada, por pioneros o por secuaces demasiado entusiastas, como la afirmación de una verdad, circunscribiendo el dominio total de la matemática aceptable[18].

Levi distingue entre lo dado -proposiciones existenciales- y lo construido -proposiciones construidas-. Luego agrega:

> Pero, en una visión más justa, la aritmetización no es más que una limitación que voluntariamente nos imponemos acerca de los instrumentos de nuestras deducciones; es imposible no admirar lo mucho de bello y de profundo que ésta y otras limitaciones han producido en el campo de la matemática. Sin embargo, no podemos inclinarnos a dar tales limitaciones un valor dogmático: la construibilidad es relativa a los medios que se conceden a la deducción, **lo existente**

18 Beppo Levi, Leyendo a Euclides (Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2003), 100.

> **es lo concebible sin contradicción dentro de cierto sistema lógico que debe entenderse determinado a priori**,-negritas añadidas- dentro de ciertos límites, con un acto de nuestra voluntad dirigido, desde luego, por las condiciones propias de nuestro pensamiento[19].

Es importante apreciar como el autor le va dando fuerza a las consideraciones del platonismo matemático. La existencia de los objetos matemáticos no queda restringida a su posible construcción, sino condicionada al hecho de no generar contradicciones. ¿Cómo garantizar esto? Una respuesta se intentó dar a través del programa metamatemático formalista de David Hilbert, el cual buscaba establecer un sistema axiomático completo, consistente y recursivo que permitiese la existencia de cualquier tipo de objetos matemáticos, construibles o no. De lograr Hilbert su objetivo, la existencia de los objetos matemáticos quedaba garantizada sin contradicción alguna. Como bien sabemos, los resultados de Gödel (1931[20]) minaron (parcialmente) esta posibilidad, pero no así el desarrollo y fortalecimiento de los sistemas axiomáticos y de la metamatemática actual.

De acuerdo con las consideraciones que hemos estado haciendo, esto sucede porque las características de la actividad matemática concreta así lo requerían. El quehacer matemático platonista comenzaba a establecerse y a consolidarse con la axiomatización. Es decir, la actividad del matemático que comenzaba a hacerse presente **requería aceptar los planteamientos del platonismo[21]**, en los

19 Levi, Leyendo a Euclides, 100.

20 Conocidos como Primer y Segundo teorema de Incompletitud. Una prueba contemporánea de ellos se puede revisar en: Herbert B. Enderton, Una Introducción Matemática a la Lógica, trad. José Alfredo Amor Montaño (México: Universidad Nacional Autónoma de México, 2004).

21 Veamos lo que Hilbert consideraba que debía ser un "supuesto mínimo" indispensable para hacer matemáticas: "Algo nos está ya dado de antemano en la representación; ciertos objetos concretos extralógicos que preceden como vivencia inmediata a todo pensamiento. Para que la inferencia lógica sea segura, estos objetos tienen que dejarse abarcar con la mirada en todas sus partes, y su presentación, su distinción, su sucesión o concatenación está dado directa e intuitivamente junto con los objetos como algo que no se deja reducir a otra cosa ni requiere una reducción." Torretti,

términos que mostraremos posteriormente.

¿Cuál es el papel que el axioma de elección tiene en estas consideraciones? Como haremos evidente, el axioma de elección acompañará el desarrollo de la matemática y metamatemática del siglo XX. Tal acompañamiento se da, tanto por su fuerte presencia en diversas áreas de las matemáticas como por ser objeto de estudio para resolver su independencia -Gödel (1930) y Cohen (1963)- además de su uso como herramienta fundamental en la metamatemática contemporánea. Inclusive, años después (1930) Zermelo presenta una versión mejorada de su sistema axiomático, y no aparece como axioma el de elección pues, a su juicio, posee una categoría distinta, considerándolo **inherente a cualquier investigación en matemáticas.** Brindar elementos que permitan sustentar esta última consideración de Zermelo es uno de los aportes de nuestra investigación.

4. *El axioma de elección y su impacto inmediato*

Como bien indica Torretti[22], desde Aristóteles se comienza a utilizar la palabra axioma como sinónimo de principio, postulado o hipótesis usada en la ciencia. En los Segundos Analíticos, Aristóteles dice que "un axioma es una aseveración que enuncia uno de los principios evidentes de la ciencia"[23] y luego indica que "toda ciencia debe edificarse sobre principios que se acrediten por sí solos."[24]Así, hacer ciencia consiste en axiomas (principios que no se demuestran) y teoremas (demostrados por inferencia deductiva a partir de aquellos). La inferencia deductiva Aristotélica es harto conocida. Lo que se ha prestado a discusión

El paraíso de Cantor, 306. Creemos que esta cita alude a algunas consideraciones del platonismo matemático.

22 Roberto Torretti, "El Método Axiomático," en La Ciencia, estructura y desarrollo, ed. César Ulises Moulines (Madrid: Editorial Trotta, 1993), 89.

23 Aristóteles, Tratados de Lógica (El Organon) (México: Editorial Porrúa, 1993).

24 Aristóteles, Tratados de Lógica.

es en qué se fundamenta la elección de ciertos principios. He aquí donde surge el interés por el estudio de los axiomas, contexto en el que se enmarca la presente investigación.

Las matemáticas no escaparon a esto. La discusión tomó relevancia durante la llamada crisis de fundamentos, acaecida a finales del siglo XIX e inicios del XX, generada por la asunción de algunos principios del platonismo matemático como, por ejemplo, el principio de comprensión intuitiva. Zermelo presentó un sistema axiomático motivado -en parte- por la necesidad de evitar las contradicciones que aparecieron en la teoría de conjuntos cantoriana, y en dicho sistema aparece como uno de sus axiomas el de elección, el cual había sido enunciado de manera explícita cuatro años antes, en la parte final de su prueba del Teorema del Buen Orden. A la par, varios programas de fundamentación se fueron desarrollando para superar las antinomias y ofrecer una base incontestable a la matemática. Frege, Russell y Whitehead (Logicismo), Brouwer y Heyting (Intuicionismo) y Hilbert (Formalismo) son considerados los fundadores de tres corrientes hoy clásicas en filosofía de la matemática, las cuales comenzaron a atender a la matemática como objeto de estudio. En este marco, la posibilidad de derivar a partir de unos principios los teoremas matemáticos conocidos, guiaban en buena parte a la mayoría de dichos programas.

Frege intentó hacerlo a partir de axiomas lógicos, pero su intención fue frustrada por la conocida paradoja de Russell (1902). ¿Qué hacer? Parecería adecuado entonces derivar los principales teoremas de la matemática desde la propia matemática. Consideramos que Zermelo así lo creyó conveniente, tomando como base la teoría de conjuntos, pues es conocido que toda teoría matemática se puede interpretar en términos de la teoría de conjuntos. ¿Cuáles principios elegir? Zermelo presentó siete, siendo el último el axioma de elección. Este fue objeto de ataques por parte de eminentes matemáticos (Borel, Peano, Lebesgue,

Skolem, Poincaré) quienes apuntaban sus acusaciones a dos aspectos: su carácter no constructivo y algunas consecuencias -a juicio de ellos inverosímiles- que tiene su aceptación, por ejemplo, que todo conjunto se pueda bien ordenar, lo que implicaría que los números reales se pueden bien ordenar, a pesar de que no se ha podido dar un orden explícito.

Desde entonces, el axioma de elección dejó de ser considerado un "principio indubitable" lo que ha puesto en tela de juicio algunas consecuencias derivadas de ella. Pero también se observó que de no utilizarse se producía una reducción considerable de las matemáticas, pues muchos resultados fundamentales requieren del axioma. Ante este panorama, el axioma comenzó a tener partidarios y detractores y -al menos- dos matemáticas comenzaban a desarrollarse: la que tiene a su disposición al axioma de elección y la que no. Junto a esto, al menos dos posiciones filosóficas respecto a la actividad matemática emergen: la intuicionista y la platonista.

Establecidas todas las consideraciones anteriores, se puede apreciar como la matemática (con diversos matemáticos opinando sobre el axioma con el lente de sus modos de hacer y pensar la matemática), la metamatemática (a través de sus programas de fundamentación) y la filosofía de la matemática intentan responder los tres, a la vez, cierto desconcierto ocasionado por la aceptación o negación del axioma. Entendible esto pues como indicásemos con anterioridad los tres ámbitos se hallaban en proceso de consolidación. Solo ahora, en retrospectiva, es que podemos organizar el debate generado y, más aún, ver cómo se consolidaron cada uno de ellos e incorporaron al axioma de elección. Importante es entender que esto no representa un recorrido histórico solamente (que solo en ese sentido ya es de gran valía) sino que permitirá nutrir a la filosofía y en particular a la filosofía de la matemática desde la práctica matemática, el quehacer matemático, como concepto central de nuestras

reflexiones. En consecuencia, explicitada ya nuestra brújula metodológica, comenzaremos nuestro recorrido identificando la presencia del axioma de elección en la matemática contemporánea.

5. *El axioma de elección en las matemáticas contemporáneas*

La presencia del axioma de elección en las matemáticas contemporáneas se puede evidenciar en las al menos trescientas ochenta y tres (383) formas en las que aparece, según refieren Howard y Rubin. Más aún, los autores precisan que cada una de las formas tiene al menos un enunciado equivalente o consecuencia estricta, y algunas formas tienen varios enunciados equivalentes o consecuencias estrictas de dicho axioma. Las formas fueron clasificadas según las distintas áreas matemáticas a las que pertenecen: Formas Algebraicas, Formas de Análisis, Formas de números cardinales, Formas de elección, Teoremas de punto fijo, Formas de Teoría de Grafos, Formas Lógicas, Principios maximales, Formas que involucran medidas sobre conjuntos, Formas diversas, Principios ordenadores que incluyen propiedades de ordenes parciales y Formas topológicas (incluyendo propiedades del conjunto de los números reales).[25]

Lo referido en el párrafo anterior pudiese ser argumento suficiente para indicar la presencia no accidental sino fundamental del axioma de elección en el desarrollo matemático contemporáneo. A pesar de ello, hemos considerado de relevancia mostrar su presencia, aplicación y justificación en tres (3) áreas, consideradas hoy clásicas, pero que al momento en que apareció el axioma se encontraban en boga, a saber: **teoría de conjuntos, topología y análisis**. Cada una de ellas se ha consolidado, con un cuerpo de conocimientos sólido, así como especialistas

25 Paul Howard y Jean E. Rubin, Consequences of the Axiom of Choice (Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1998).

atendiendo sus principales y peculiares problemas. Por ende, existen entre los matemáticos aquellos que se identifican como conjuntistas, analistas, topólogos, algebristas, etc. Así, dentro del área particular existe acuerdo respecto a las nociones y resultados fundamentales sobre las que descansa. Verificaremos que el axioma de elección forma parte no accidental sino central en algunos de esos resultados y, más aún, contribuye al desarrollo del área en cuestión.

Al respecto se ha objetado que es posible hacer teoría de conjuntos, análisis, topología y álgebra sin el axioma de elección, lo cual es cierto, pero la matemática resultante queda disminuida considerablemente en comparación con la que se obtiene con elección. Que sea necesario el axioma de elección en estas áreas no refiere a la necesidad lógica, sino a la que forma parte del modo contemporáneo de hacer matemáticas, que, como veremos posteriormente, se adscribe a algunos aspectos del platonismo matemático y de la investigación científica. Postular entidades matemáticas es aceptable para la mayoría de la comunidad matemática hoy día, mas no lo era cuando surgió el axioma de elección. ¿Qué elementos contribuyeron a su posterior aceptación? Uno de los principales tiene que ver con la gran cantidad de resultados que se sustentan en el axioma, los cuales no pueden soslayarse pues son pilares fundamentales en cada área estudiada. Presentaremos a continuación tales resultados, indicando el área al cual pertenece y su relevancia dentro del mismo.

6. *Teoría de conjuntos: Teorema del Buen Orden*

La teoría de conjuntos es considerada hoy la teoría base de las teorías matemáticas contemporáneas. Y se denomina "teoría base" en un sentido bien específico. Jané al respecto nos dice:

> Que una teoría T sea interpretable en la teoría de conjuntos significa que es posible tratar los objetos de que T se ocupa como conjuntos, y los conceptos, las

> operaciones y las relaciones que le son propias como conceptos de conjuntos, operaciones con conjuntos y relaciones entre conjuntos, y ello de modo tal que a cada una de las proposiciones expresables en el lenguaje de T se le asocia de manera sistemática una proposición conjuntista y que las proposiciones conjuntistas asociadas a los teoremas de T son teoremas de la teoría de conjuntos. Brevemente, interpretar una teoría matemática en la teoría de conjuntos equivale a reformularla como un fragmento de la teoría de conjuntos. Esto le da a la teoría de conjuntos una peculiaridad digna de análisis y especial atención.[26]

Así el estudio de la teoría de conjuntos cobra relevancia dentro del área de fundamentos. Más aún, ha influenciado el desarrollo de las distintas áreas de las matemáticas. Esto se puede apreciar en la obra monumental de Bourbaki, con su efecto orientador y uniformizador del trabajo matemático en el período 1950-1980, siendo expresión de la preponderancia de la teoría de conjuntos a un nivel más sofisticado. En el Congreso de la Association for Symbolic Logic de 1948, decía Bourbaki:

> Como todos sabemos, todas las teorías matemáticas pueden ser consideradas como extensiones de la teoría general de conjuntos.[27]

En consecuencia, estudiar si la presencia del axioma de elección en la teoría de conjuntos es accidental o necesaria, podría informarnos acerca de su influencia en las demás áreas de las matemáticas. ¿Cómo verificar esto? Es conocido que las investigaciones de Cantor las cuales llevaron a lo que más adelante sería la teoría de conjuntos, se originaron producto de su atención sobre ciertos conjuntos de puntos de la recta, llevándolo luego al estudio de los conjuntos en general. Para ese momento

26 Ignacio Jané, "¿De qué trata la teoría de conjuntos?," en Filosofía de la lógica, eds. Raúl Orayen y Alberto Moretti (Madrid: Editorial Trotta, 2004), 247.

27 José Ferreirós, "El enfoque conjuntista en matemáticas," La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 1, no. 3 (1999): 389.

no existía una presentación axiomática de la teoría de conjuntos (el primero en hacerlo fue Zermelo en 1908), pero comenzaba a desarrollase el denominado enfoque "conjuntista" el cual posteriormente dominó el desarrollo de la matemática.

Durante sus investigaciones, Cantor definió lo que es un *conjunto bien ordenado* en su escrito número cinco denominado *Sobre variedades lineales infinitas de puntos,* publicado en 1883. Naturalmente, como buen matemático que aprecia la generalización, se preguntó sobre la posibilidad de bien ordenar a *todo* conjunto. Al respecto afirmaba:

> El concepto de conjunto bien ordenado resulta ser fundamental para la teoría de las variedades. Que siempre es posible reducir cada conjunto bien definido a la forma de un conjunto bien ordenado es una ley del pensamiento, a mi modo de ver, básica y fecunda, y especialmente notable por su universalidad, a la cual retornaré en un trabajo posterior.[28]

La importancia de poder bien ordenar un conjunto estriba en el hecho de que gracias a ello se establece el concepto de número cardinal de un conjunto. Así lo dice Cantor:

> Una de las tareas más importantes de la teoría de conjuntos, que creo haber resuelto en lo principal en [el escrito Nro. 5 de 1883], consiste en la exigencia de determinar las distintas valencias o potencias de las variedades presentes en la totalidad de la naturaleza, en la medida en que ésta se abre a nuestro conocimiento. Lo he logrado mediante la formación del concepto general del enumerador de un conjunto bien ordenado, o lo que es lo mismo, del concepto de número ordinal.[29]

28 George Cantor, Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts (Berlin: Springer-Verlag, 1932), 169, citado en Torretti, El paraíso de Cantor, 35.

29 Torretti, El paraíso de Cantor, 36.

Se desprende que para poder determinar el cardinal de un conjunto debe este poderse bien ordenar. ¿Es posible hacerlo para todo conjunto? Cantor consideró que sí, pero no pudo probarlo. Fue Zermelo en 1904 quien da la prueba, la cual requiere hacer uso en ella del axioma de elección. Llegamos entonces a lo central: para poder definir el cardinal de un conjunto es necesario que pueda bien ordenarse, pero esto último solo sucede si asumimos el axioma. Así, estamos mostrando específicamente en cuál parte de la teoría de conjuntos hace su aparición. Es tal su importancia que en la presentación estándar en libros de texto matemáticos actuales sobre teoría de conjuntos es usual encontrar los siguientes conceptos que conducen a la definición de conjunto bien ordenado.

Definición: Una relación binaria R en un conjunto A ($A \subseteq R \times R$) es una relación de **orden parcial débil** si:

(1) $\forall x \in A(xRx)$,

(2) $\forall x \in A \forall y \in A(xRy \land yRx \to x = y)$,

(3) $\forall x, y, z \in A(xRy \land yRz \to xRz)$

(Esto es, R es una relación del tipo $\leq$).

Definición: Decimos que R es una relación de orden parcial estricto en A si:

(1) $\forall x \in A\neg(xRx)$,

(2) $\forall x, y \in A(xRy \to \neg yRx)$,

(3) $\forall x, y, z \in A(xRy \land yRz \to xRz)$

(Esto es, R es una relación del tipo $<$).

Se llamará orden parcial a una relación de orden parcial débil o de orden parcial estricto. La notación usual para *R* es <. Dado un orden parcial estricto < se define $x \leq y \leftrightarrow x < y \vee x = y$, y se llama a la relación ≤ orden parcial débil. Al par (A, ≤) donde $A \neq \emptyset$ se le llama orden parcial débil mientras que al par (A, <) se le llama orden parcial estricto. Las definiciones anteriores son de capital importancia ya que en el tratamiento matemático cotidiano es usual encontrar órdenes parciales. Veamos algunos ejemplos:

1) Dado un conjunto X, consideremos el orden dado por ⊆ en *P* (x): Si x = {a, b}, P (x) = {ø, {a}, {b}, {a, b}} Tenemos, por ejemplo: ø ⊆ {a}, {b} ⊂ {a, b}, pero no {a} ⊆ {b}.

(2) A = *R* y *R* = < (el orden usual de los números reales).

(3) A =*N*, *R* la relación "es divisor de".

Definición: Una relación de orden *R* es un **orden total (o lineal)** si *R* es una relación de orden parcial tal que ∀x,y ϵ A (x*R*y ∨ y*R*x ∨x = y). El ejemplo por excelencia de un orden total es *R* con el orden usual. También *Q* es un orden total.

Definición: Consideremos < un orden parcial y sea D un conjunto. Un elemento *m* de D se dice un **elemento minimal** de D si y sólo si no existe x en D tal que x < m. Y *m* es el mínimo elemento de D si y sólo si m ≤ x para todo x en D. Todo elemento mínimo es también minimal. Para un orden total en un conjunto que incluya a D los dos conceptos coinciden, ya que $\sim(x < m) \rightarrow m \leq x$.

Las definiciones presentadas permiten caracterizar las propiedades fundamentales que podrían tener conjuntos determinados. En particular, es de interés saber si existen estructuras parcial o totalmente ordenadas para determinados conjuntos y si poseen elemento mínimo. Todo lo anterior es natural si consideramos que Cantor, al dar estas definiciones,

buscaba caracterizar a los conjuntos en general, partiendo de los conjuntos de puntos de la recta real que iba estudiando, tratando de determinar cómo se comportan *N*, *Z*, *Q*, *R* y varios subconjuntos de ellos, los cuales son utilizados por todos los matemáticos en su actividad cotidiana.

Definición (Buen orden): Un *buen orden* en *A* ($A \neq ø$) es un orden parcial en *A* donde cada subconjunto no vacío de *A* tiene elemento mínimo.

Existen conjuntos que poseen un buen orden y otros que no. Por ejemplo, el orden usual en *N* es un buen orden pero en *Z* no hay buen orden, ya que no tiene elemento mínimo. Los buenos órdenes son importantes porque se pueden utilizar para indexar construcciones que proceden de "abajo hacia arriba", donde en cada etapa de la construcción (excepto el último) existe un próximo paso único. Esta construcción se puede evidenciar en la jerarquía acumulativa del sistema axiomático de Zermelo y la presentación del universo *V* de Von Neumann[30].

Esto reviste importancia debido a que si un conjunto no posee un buen orden, no es posible definir su cardinalidad. Como todo conjunto bien ordenado es isomorfo a un único ordinal, entonces es posible asignarle a cada conjunto un número cardinal. De no ser bien ordenados, se impide la realización de -entre otros- toda la aritmética cardinal transfinita de Cantor y los resultados metamatemáticos de Gödel (1938) y Cohen (1963). Así explicado, es entendible el interés por determinar si todo conjunto posee un buen orden. Torretti indica que:

> Para su programa -el de Cantor- el Teorema del Buen orden era indispensable: la sucesión de los ordinales alcanza para enumerar todo lo que se presente

30 Vale la pena resaltar que un artículo clásico sobresaliente sobre el quehacer matemático es el siguiente de Von Neumann: "El matemático," en Sigma: El mundo de las matemáticas, vol. 5, ed. James R. Newman (Barcelona: Ediciones Grijalbo, 1976), 443-453.

> a la naturaleza corpórea y espiritual si -y solo si- cada conjunto puede ordenarse bien[31].

La cita nos permite hacer algunas consideraciones sobre los compromisos y la posición de Cantor frente a las entidades matemáticas. Al respecto, el hecho de que se enumere "lo que se presente a la naturaleza corpórea y espiritual" nos habla de un evidente platonismo. En este sentido, las propiedades de los conjuntos son descubiertas por el matemático, es por ello que "se abre a nuestro conocimiento." El concepto de buen orden es requisito indispensable para definir uno de los conceptos fundamentales de la teoría de conjuntos: el concepto de ordinal. Sin él, es imposible definir la clase de los ordinales y no podrá desarrollarse toda la aritmética cardinal de la teoría de conjuntos, lo que limita severamente varios resultados que en él se soportan.

Ahora bien, la propiedad de tener un buen orden para todo conjunto no pudo ser demostrada por Cantor. Sí lo hace Zermelo en 1904 y he aquí cuando hace su entrada en el quehacer matemático de manera explícita el axioma de elección. Somos reiterativos en destacar la importancia del teorema del Buen Orden para el desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana: gracias a ella es posible definir el cardinal de un conjunto y con ello el infinito actual se hace manejable matemáticamente. La robustez que esto ofrece al desarrollo de la teoría de conjuntos y a la matemática por extensión se pierde de vista. Por lo tanto, la presencia del axioma de elección en la teoría de conjuntos no es accidental sino necesaria para el completo desarrollo de la misma. Todo lo anterior ratifica en consecuencia la presencia del axioma de elección como aspecto capital para la teoría de conjuntos.[32]

---

31 Torretti, El paraíso de Cantor, 35.

32 Una demostración del Teorema del Buen Orden se puede ver en: Jech, Set Theory, 48 y Carlos A. Di Prisco, Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de la matemática, vol. 20 (Campinas: Coleção CLE, 1997), 54-55.

7. *Teoría de Conjuntos: Lema de Zorn*

El lema de Zorn es posiblemente la forma más común en que es usado el axioma de elección en la matemática contemporánea. En efecto, rápidamente llegó a formar parte de la literatura matemática estándar y es usual encontrarlo en libros de texto matemáticos. La siguiente cita corrobora lo que hemos planteado:

> A pesar de la fuerza de la oposición inicial contra ella, el axioma de elección de Zermelo poco a poco fue aceptado principalmente porque era necesario para, en una etapa temprana, el desarrollo de varias ramas de las matemáticas, no solo en teoría de conjuntos, sino también en topología, álgebra y análisis funcional, por ejemplo. Hacia el final de los años treinta, se había establecido firmemente y se hizo parte del currículum estándar en matemáticas en la forma del lema de Zorn[33].

Conocer la equivalencia entre el axioma de elección y el lema de Zorn nos permite evidenciar su cada vez mayor utilización del axioma en las matemáticas. Daniel Crespin afirma que:

La equivalencia entre el axioma de elección y el lema de Zorn es un requisito indispensable para desarrollar las partes más útiles de la teoría de conjuntos. Al igual que otros tópicos que fundamentan áreas extensas de las Matemáticas, los planteamientos deben tener la mayor amplitud posible. Así no se imponen restricciones a la cardinalidad de los conjuntos y salvo algunos ejemplos ilustrativos pero totalmente prescindibles en el desarrollo teórico, tampoco se utilizan los números naturales[34].

El lema de Zorn posee tal caracterización. Además, se describe lo que es común a las matemáticas contemporáneas:

33 Sten Lindström, et al., Logicism, Intuitionism, and Formalism: What has become of them? (Dordrecht: Springer, 2009), 210.

34 Daniel Crespin, "Axioma de Elección y Lema de Zorn," en *Cartillas Matemáticas* (Caracas: Escuela de Matemáticas, Univesidad Central de Venezuela, 2007), 1.

generalización y amplitud. En particular, se refiere la utilización del infinito actual como dado, a tal punto que infinitos superiores a son los más usuales en el quehacer matemático cotidiano. La descripción que el autor hace es evidencia del platonismo en las matemáticas actuales.

Es interesante observar como el lema de Zorn, a pesar de ser equivalente al axioma de elección, es preferido por los matemáticos en su actividad matemática cotidiana. Lo anterior se debe a que, como bien indica Paul Halmos "Muchos teoremas de existencia pueden ser formulados (o, si es necesario reformulados) de modo que el conjunto subyacente esté parcialmente ordenado y tiene la determinante propiedad de la maximalidad."[35] De esta manera, los matemáticos "evitarían" explícitamente nombrar al axioma, aún siendo equivalente al mismo. En atención al desarrollo del quehacer matemático veamos lo que el propio Max Zorn refiriese. Él publica su lema como un "axioma cierto sobre conjuntos de conjuntos" con el objetivo de **sustituir** "al teorema del buen orden y la teoría que lo soporta."[36] Siendo equivalentes ambas proposiciones llama la atención que haga esa consideración. Lo que sucede es que para él, la teoría que sustenta al buen orden, "está prohibida, desde un punto de vista algebraico"[37], por lo que se entiende que luego indicase que su propósito es "hacer las demostraciones cortas y más algebraicas"[38] objetivo que considera posible con el lema.

El lema de Zorn, aunque es equivalente al axioma de elección, en el trabajo matemático cotidiano es preferido porque no requiere la utilización de ordinales e inducción transfinita, elementos asociados con el Teorema del buen orden, por ejemplo. Esto en las primeras décadas del siglo XX era visto como importante

35 Paul R. Halmos, *Naive set theory* (New York: Springer, 1974), 62.

36 John L. Bell, *The axiom of choice* (London: College Publications, 2009), 20

37 Bell, *The axiom of choice,* 21.

38 Bell, *The axiom of choice,* 21.

para varios algebristas, quienes lo privilegiaban ya que se centra en la maximalidad y no en funciones de elección que, aunque imprescindibles, no parece tener especial relevancia para ellos. Esto nos muestra que el matemático utilizará las nociones y conceptos que les sea más fáciles de trabajar, sin importar si la misma es platonista o intuicionista.

No se debe entender lo anterior como una desventaja sino parte del desarrollo natural del quehacer matemático. En consecuencia, la naturaleza de lo que se investiga será la guía fundamental del matemático para su actividad. Lo que hemos referido nos muestra ya la discusión entre un quehacer matemático constructivista y un quehacer abstracto, este ultimo aún no consolidado para inicios del siglo XX. La mayoría de los algebristas de aquella época ve en el axioma de elección la utilización de transfinitos, que consideraban "aparatos trascendentales, extraños al progreso de las matemáticas."[39] Esto es entendible para aquella época, pues el planteamiento platonista no se había consolidado aún en la actividad matemática cotidiana. En efecto, obsérvese a continuación cómo se presenta el Lema de Zorn en la literatura estándar de matemáticas

Definición: Sean (P, R) un orden parcial y $D \subseteq P$. $x \in P$ es un **elemento maximal** de D si $x \in D$ y no existe ningún y D tal que $y \neq x \wedge xRy$. x es una **cota superior** de D si $\forall y \in D(yRx \vee y = x)$

Lema de Zorn: Sea (A, R) un conjunto parcialmente ordenado tal que cada $X \subseteq A$ totalmente ordenado tiene una cota superior en A. Entonces A tiene un elemento maximal.

Se puede verificar entonces que para enunciar el lema de Zorn se trabaja con orden parcial y dos conceptos más: cota superior y elemento maximal. Para efectos del camino metodológico que hemos recorrido, resaltemos cómo a pesar

39 Bell, The axiom of choice, 21.

de su aparente no relación del lema con el axioma de elección, resulta que son equivalentes[40].

8. *Topología: Teorema de Tychonoff*

Courant y Robbins ofrecen una excelente presentación del surgimiento de la topología en la matemática. En efecto, los autores refieren que:

> A mediados del siglo XIX comenzó un desarrollo enteramente nuevo de la geometría que pronto se convirtió en una de las fuerzas más potentes de la matemática moderna. La nueva disciplina, llamada *analisis situ* o topología estudia las propiedades de las figuras geométricas que subsisten aún si esas figuras se someten a deformaciones tan radicales que las hagan perder todas sus propiedades métricas y proyectivas[41].

En efecto, la topología estudia tales propiedades de forma rigurosa y definida. Una de ellas, la **compacidad**, es de uso fundamental y una propiedad de mucho interés para los topólogos. Esto se debe a que hay una serie de resultados y nociones que dependen directamente de ella. Por ejemplo, teoremas tales como el Teorema de Tychonoff, Teorema de Cech-Stone, Teorema de Ascoli y el Teorema de categoría de Baire, junto con conceptos tales como filtros, ultrafiltros, subespacios de, etc. de mucha utilidad en el quehacer matemático contemporáneo.

Como plantea Herrlich, la definición de compacidad original fue presentada por Alexandroff y Urysohn en 1929, la cual muestra

40 La demostración de la equivalencia se puede hallar en: Di Prisco, Una introducción a la teoría de conjuntos, 55-56.

41 Richard Courant y Herbert Robbins, ¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos, trad. Luis Bravo Gala (Madrid: Aguilar, 1962), 247.

tres (3) condiciones para que un espacio sea compacto. Lo que interesa para los propósitos de nuestra investigación es que dos de las condiciones presentadas por ellos serán equivalentes si y solo si se acepta el axioma de elección, mientras que la otra condición, si no acepta elección será -a juicio de Herrlich- "ligeramente antinatural e impracticable."[42] Se verifica nuevamente como la presencia del axioma de elección se hace necesaria para el completo desarrollo de un área matemática.

Nuestras consideraciones se enfocarán en uno de los teoremas topológicos más utilizados y que equivale al axioma objeto de estudio. En 1935, el matemático ruso Andrei Nykolaievich Tychonoff demostró que el producto arbitrario de espacios topológicos compactos es a su vez compacto, si se le dota de la topología producto. Existe acuerdo entre los topólogos respecto a la importancia de este teorema[43]. Es tal la relevancia que Rubin y Rubin lo coloca como el primer teorema en forma topológica que depende del axioma de elección[44].

Es importante indicar el hecho de que Tychonoff realiza su prueba usando el axioma de elección, y en 1950 el matemático estadounidense John Kelley demostró la equivalencia estableciendo la implicación faltante (Si vale Tychonoff entonces vale elección). En 1962, L.E.Ward demostró que una versión más débil del Teorema de Tychonoff es equivalente al axioma de elección. También se ha demostrado que puede ser válido sin necesidad del axioma de elección, si se entiende por topología un concepto no supeditado a un conjunto de puntos, sino que se parte de un retículo de abiertos como noción primitiva y no de la de punto como es habitual.[45]

42 Horst Herrlich, Axiom of choice (Berlin: Springer, 2006), 33.

43 Herrlich refiere tres opiniones autorizadas. Véase Herrlich, Axiom of choice, 32.

44 Herman Rubin y Jean E. Rubin, Equivalents of axiom of choice (Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1970).

45 Al respecto se puede consultar P. T. Johnstone, "Tychonoff's Theorem without the axiom of choice," Fundamenta Mathematicae 113, no. 1 (1981): 21-35. La demostración de la equivalencia entre el axioma de elección y Tychonoff se puede ver en: Juan Antonio

El recorrido que hasta ahora llevamos del axioma en las matemáticas contemporáneas nos ha permitido observar en las dos áreas analizadas hasta ahora (teoría de conjuntos y topología) como dicho axioma sustenta resultados de capital importancia, lo que ha contribuido a la expansión de las mismas. Esto ratifica el camino metodológico presentado y su importancia para la reflexión filosófica. En efecto, el quehacer matemático es nuestra mirada central y desde ella filosofamos. Ahora bien, queremos destacar cómo a pesar de la utilización del axioma, durante el desarrollo y consolidación de cada área se tuvo el cuidado de determinar las **condiciones estrictamente necesarias** para la utilización del mismo.

Es decir, siempre que los matemáticos puedan trabajar sus entidades matemáticas **constructivamente** así lo harán, mas si no es posible postularán las entidades que necesiten para sus investigaciones. Esto se evidencia en lo referido sobre el Lema de Zorn (que fuera postulado para sustituir al axioma, probándose luego que son equivalentes) y en el Teorema de Tychonoff (el cual no requiere del axioma de elección si la noción primitiva son retículo de abiertos). Así, el quehacer matemático cotidiano posee en su desarrollo aspectos que se identifican con el constructivismo, pero a su vez el platonismo matemático se fue consolidando, lo que permite evidenciar que no hay en el quehacer matemático cotidiano contraposición entre tales posiciones, privilegiándose lo que el matemático necesite para trabajar. Veamos como también esto se aprecia en el análisis y en la teoría de la medida, tal y como se muestra a continuación.

9. *Análisis: Teorema de Hahn-Banach*

El Teorema de Hahn-Banach es un teorema de extensión de funcionales que se debe independientemente al matemático Hans

Pérez, "Los Teoremas de Tychonoff y de los productos conexos son equivalentes," Revista de Matemática: Teoría y aplicaciones 23, no. 1 (2016): 1-10.

Hahn (1927) y Stefan Banach (1929), quienes aparentemente generalizaron ideas del Edward Helly (1912). El teorema se presenta de variadas maneras, tanto analíticas como geométricas. Su utilización es de capital importancia y es considerado uno de los cuatro pilares del análisis funcional, junto con el Principio de la Acotación Uniforme, el Teorema de la Aplicación Abierta y el Teorema del Grafo Cerrado. Antes de enunciarlo presentamos una definición necesaria.

Definición: Sea E un espacio vectorial real. Una función $p: E \to R$ es un **funcional sublineal o subnorma** si cumple las siguientes propiedades:

(1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

(2) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para todo $x \in E$ y todo $\alpha \in R$ con $\alpha > 0$

Teorema (Hahn-Banach[46]): Sean E un espacio vectorial real y M un subespacio de E. Supongamos que p es un funcional sublineal sobre E y que $f: M \to R$ es una aplicación lineal tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in M$. Entonces existe una aplicación lineal $g: E \to R$ tal que $g \mid M = f$ y $g(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Es importante hacer algunas consideraciones respecto al Teorema de Hahn-Banach. Así como refiriéramos que es posible una demostración del Teorema de Tychonoff sin elección (haciendo las salvedades correspondientes), se ha planteado lo mismo para Hahn-Banach. Al respecto, es conocido que el Teorema de Hahn-Banach implica el axioma de elección para familias de conjuntos convexos cerrados en espacios reflexivos y para familias más generales de convexos en espacios localmente convexos[47]. Sin esas condiciones específicas, se puede hacer la demostración de manera constructiva.

46 Véase: Luis Bernal González y Tomás Domínguez Benavides, Nociones de análisis funcional (Sevilla: Universidad de Sevilla, Departamento de análisis matemático, 2010), 52-54.

47 Xavier Caicedo y Germán Enciso, "El Teorema de Hahn-Banach como principio de elección," Revista de la Academia Colombiana de Ciencias 28, no. 106 (Marzo 2004): 11-20.

Además, se sabe que Hahn-Banach es estrictamente más débil que elección, ya que se sigue del principio de existencia de ultrafiltros (UF). Esto último no implica elección . Y además, Pincus en 1974 probó que Hahn-Banach es más débil que el principio de existencia de ultrafiltros . Se tienen entonces las siguientes implicaciones (en ZF sin elección): AE → UF → HB. Todo lo anterior nos muestra que, dentro del quehacer matemático cotidiano, hay cabida para las demostraciones constructivas. Esto no niega al platonismo sino que, tal y como queremos enfatizar en el desarrollo de la presente investigación, siempre que pueda el matemático hará demostraciones constructivas pero si no puede y debe recurrir a asunciones platonistas, procederá sin inconveniente.

Deseamos agregar que existe una relación entre el Teorema de Hahn-Banach, el axioma de elección y la Teoría de la medida, otra área fundamental de las matemáticas contemporáneas. No se explicará aquí la participación del axioma de elección en la teoría de la medida[48]. Aun así, podemos indicar que en 1905 Vitali demostró la existencia de un conjunto que no es susceptible de ser medido con la medida de Lebesgue, **usando en su demostración al axioma de elección**. El resultado de Vitali fue el primero de una serie de resultados matemáticos que dependen de elección publicados después de 1904.

Además es conocido que si ZF es consistente entonces también lo es ZF + ¬ AE + $L(R) \neq P(R)$ lo que significa que el axioma de elección no equivale a $L(R) \neq P(R)$. Además, Solovay en 1970 probó que si ZF + existe un cardinal inaccesible es consistente entonces también lo es ZF + Todo A $\subseteq R$ es medible-Lebesgue. En ese caso, el Teorema de Hahn-Banach será falso. Podemos apreciar entonces que nuestros resultados dependerán de lo que se acepte como existente. En particular, que la existencia de un cardinal inaccesible (entidad matemática platonista que no se puede probar

48 Carmen Martínez-Adame, "¿Es necesario el Axioma de Zermelo para comprender la Teoría de la Medida?," Methateoria – Revista de Filosofía e Historia de la Ciencia 3, no. 2 (2013): 37-64.

en ZFC) pueda hacer falso Hahn-Banach deja la puerta abierta a mayores investigaciones.

Hecho nuestro recorrido por la teoría de conjuntos, la topología y el análisis (así como una breve referencia a la teoría de la medida) se ratifican las siguientes consideraciones: 1) El axioma elección tiene una presencia no accidental sino fundamental para el desarrollo de cada área estudiada, 2) Su presencia ha ayudado a los matemáticos a precisar bien aquellas demostraciones que requieren del axioma de las que no y 3) Como matemáticos que son (que no metamatemáticos, que no filósofos) su guía fundamental ha sido **generar conocimiento matemático** y para ello no han tenido inconveniente en postular entidades cuando de manera constructiva no pueden obtenerlas. Desde una posición metodológica que privilegia el quehacer matemático, lo anterior nos permite sustentar una filosofía de la matemática que respeta este desarrollo.

10. *Una aplicación del axioma de elección a la lógica de primer orden*

Siguiendo nuestra ruta metodológica, mostraremos cómo el axioma de elección también está presente en la lógica de primer orden, la cual es considerada la lógica base de las matemáticas. En 1923 Skolem propuso que se escribiera la teoría de conjuntos en primer orden y luego Quine apoyó esta propuesta, siendo aceptada después por la comunidad de lógico-matemáticos. ¿Cuáles elementos contribuyeron a su aceptación? Principalmente al hecho de que toda lógica con mayor capacidad expresiva que la lógica de primer orden no satisface la propiedad de Compacidad o la Propiedad de Lowenheim-Skolem y por lo tanto es incompleta, ya que dichas propiedades (que tienen sobresalientes aplicaciones metamatemáticas) son consecuencia de completitud[49].

49 Y también se debe a los teoremas de incompletitud de Gödel de 1931, entre otras razones.

Por lo tanto, se observa una relación de vital importancia entre la lógica de primer orden y el Teorema de Completitud de Gödel, específicamente, en la demostración del Teorema de Completitud de Gödel para la Lógica de primer orden **con lenguajes de cualquier cardinalidad** debida a Henkin (1949), la cual consiste en la demostración de tres lemas, y se hace uso del axioma de elección. El mismo no es necesario si se tratase con lenguajes numerables, que es lo más encontrado en la literatura sobre lógica matemática. Esta generalización del teorema se corresponde por un lado con lo que es usual en el quehacer matemático de buscar la **mayor amplitud posible** y, además se consolida por las consecuencias que trae tal generalización. El Teorema de Completitud de Gödel nos informa que, en primer orden, todo lo que sea lógicamente válido se puede demostrar. Es allí donde se podrá evidenciar la necesidad de usar el axioma de elección cuando la cardinalidad del lenguaje es no numerable. La formalización del teorema y los lemas se presentan a continuación[50].

Teorema (Gödel): Sea Σ un conjunto de sentencias de un lenguaje *L* y φ una sentencia de *L*. Entonces:

$$\Sigma \vDash \varphi \;\Rightarrow\; \Sigma \vdash \varphi$$

Definición: Sea Σ un conjunto de sentencias del lenguaje *L* y C un conjunto de constantes de *L*. Decimos que C es un conjunto de testigos para Σ en *L* si para toda fórmula de *L* con a lo sumo una variable libre (digamos, x) existe una c ϵ C tal que:

$$\Sigma \vdash \neg\forall x\, \varphi(x) \;\rightarrow\; \neg\varphi(c)$$

Lema 1: Sea Σ un conjunto de sentencias de *L* y C un conjunto de nuevas constantes tal que | C |=| L |. Sea *L´* = *L* ∪ C. Entonces Σ se puede extender a un conjunto consistente de sentencias Σ´ en *L´* tal que C es un conjunto de testigos para Σ´ en L´.

50 La demostración del teorema y de los tres lemas se pueden ver en: Franklin Galindo, "Tres tópicos de lógica," trabajo de ascenso no publicado (Caracas: Universidad Central de Venezuela, 2012), 74-83.

Lema 2: Todo conjunto de sentencias Σ posee una extensión maximal consistente.

Lema 3: Si Σ es un conjunto consistente de sentencias de L y tiene un conjunto de testigos C, entonces Σ tiene un modelo de cardinalidad a lo sumo | L |.

El disponer de la versión generalizada del Teorema de Completitud de Gödel tiene una importancia capital ya que permite demostrar resultados fundamentales en **Teoría de Modelos**, tales como el Teorema de Lowenheim-Skolem-Tarski hacia abajo y hacia arriba, que implica (entre otros) la existencia de modelos no estándar de cualquier cardinalidad para la aritmética, así como también el hecho de que no existen teorías categóricas en primer orden que tengan un modelo infinito, a lo sumo pueden ser ℵ α-categóricas, para algún ordinal . Sin el axioma de elección, no son posibles las realizaciones anteriores.

11. *El axioma de elección en la metamatemática contemporánea*

Nuestra ruta metodológica nos ha llevado a la revisión de algunos resultados matemáticos fundamentales en los que ha sido suficiente usar el axioma de elección. Además, lo hemos utilizado en la lógica de primer orden, a través de un resultado metamatemático de gran calibre. Observemos pues su versatilidad, ya que se encuentra *dentro* de las matemáticas pero también es utilizada *fuera* de ella[51]. Consideramos que esto muestra la certera intuición de Zermelo en 1930, cuando expresara que el axioma es un **principio-guía** para toda investigación en matemáticas.

51 El ser utilizado fuera de la matemática alude al hecho de que todo resultado metamatemático -o lógico-matemático- se puede entender de al menos dos formas: 1. Como un resultado matemático a secas - sin ningún valor agregado- y 2.Como resultado metamatemático que se puede usar para estudiar los fundamentos de las matemáticas. Tanto en el caso 1 como en 2, el axioma de elección está presente.

A pesar de esto, bien puede objetarse que su utilización no es garantía de necesidad para las matemáticas. Ante tal situación, se ha considerado que un argumento de mayor peso para decidir su necesidad para las matemáticas es responder si su aceptación podría generar alguna contradicción. De verificarse esto, todos los resultados que se sustentaban en él serían desestimados y el axioma estaría condenado al ostracismo. Gracias a Gödel sabemos que no es así. Por ello, a diferencia de los apartados anteriores, colocaremos al axioma ahora como objeto de estudio metamatemático, buscando legitimar su uso. Esta carta de legitimidad se obtiene a través de las pruebas de **consistencia relativa** de Gödel y Cohen, que establecieron su **independencia** de ZF.

Los métodos utilizados para la prueba de la independencia del axioma de elección son hoy estándar para el desarrollo de la metamatemática contemporánea, siendo de tal complejidad que su estudio forma parte de tratados en la literatura especializada. Por ello, la presentación que haremos será a nivel descriptivo, asumiendo algunos resultados necesarios. Nuestro objetivo fundamental es describir la estructura general de las demostraciones de Gödel y Cohen, logrando, al recorrerlas, identificar el tratamiento platonista que necesariamente poseen los conceptos involucrados.

12. *Consistencia relativa e independencia*

En general, para determinar la consistencia de una proposición determinada se muestra que la misma no se puede refutar en un sistema axiomático dado -probando que el sistema en sí mismo no es contradictorio-. Usualmente se da una interpretación o modelo del lenguaje del sistema, en la cual todos los axiomas son verdaderos junto con la proposición objeto de estudio. En nuestro caso, el sistema axiomático ZF ha sido considerado la referencia estándar en este sentido.

Por los resultados de Gödel, sabemos que no podremos determinar si todo ZF acarrea contradicción o no. Más aun, ningún sistema axiomático (recursivo) lo suficientemente fuerte para describir la aritmética de Peano puede probar su propia consistencia. Por ende, aún cuando agreguemos el axioma de elección a ZF, conformándose ZFC, no podremos determinar su propia consistencia - la de ZFC-. Queda entonces hacer una prueba de consistencia relativa: Si ZF es consistente entonces ZF + AE es consistente. La misma fue hecha por Gödel a través de lo que se conoce como el método de los *conjuntos constructibles*. Mostraremos que también es consistente negar el axioma de elección: Si ZF es consistente entonces ZF+ ¬ AE es consistente. Este resultado se debe a Cohen y utiliza el método de construcción de modelos llamado *forcing*. Con ambos resultados se establece la independencia del axioma de elección de ZF. Lo anterior se formaliza de la siguiente manera

Definición: Sea T una subteoría de ZFC; por ejemplo la misma ZFC o ZF y consideremos φ una proposición del lenguaje de T

(1) Se dice que φ es independiente de T (o es indecidible en T) si y sólo si T $\nvdash \varphi$ y T $\nvdash \neg\varphi$.

(2) T + φ es consistente relativa a T si y sólo si: Si T es consistente, entonces T + φ es consistente.

Para probar que AE es independiente de ZF se debe demostrar que ZF $\nvdash$ AE y ZF $\nvdash \neg$AE siendo ambas pruebas nada sencillas. En ambos casos se construirán modelos, en el primero valdrá el axioma, mientras que en el segundo no. Describiremos los aspectos esenciales de la primera demostración.

13. *Universo de los conjuntos constructibles de Gödel*

El concepto fundamental sobre el que descansa la demostración de la consistencia del axioma de elección es la de conjunto

constructible. La constructibilidad tiene varias maneras de relativizarse, en este artículo se describe una de ellas, la cual permite, a través de la construcción de la clase de los conjuntos constructibles -usualmente llamada L- establecer la consistencia relativa del axioma de elección de ZF, pues dicha clase es un modelo del axioma. Más aún, es el modelo transitivo más pequeño que contiene a los ordinales, siendo esto fundamental ya que se puede encontrar un buen orden para L. Así, como el axioma de elección equivale al buen orden, vale en dicho modelo.

El procedimiento para la construcción del modelo L se presenta de manera resumida en los siguientes términos: En primer lugar se establece la noción de relativización, el cual permite mostrar el concepto de definibilidad, siendo este último esencial para construir a L. De seguidas, se establece la noción de función de dos variables Df (A, n), que se puede entender como el conjunto de las relaciones n-arias de A las cuales son definibles por una fórmula con n variables libres relativizada a A. Posteriormente se define *D*(*A*), el cual es el conjunto de los subconjuntos de *A* que son definibles a partir de un número finito de elementos de *A* por una fórmula relativizada a *A*. Todo lo anterior permite construir a L usando recursión transfinita sobre los ordinales. Más adelante, se establece cuando una fórmula es absoluta. Hecho esto, se muestra que L es un modelo de ZF y un modelo del axioma de elección. Ambas demostraciones permite mostrar que vale el siguiente teorema: Si ZF es consistente entonces ZF + AE lo es también[52]. La demostración utiliza herramientas que son identificadas como platonistas.

Por lo tanto, estamos en posición de garantizar el uso del axioma sin riesgo de contradicción alguna. En los términos en los que se ha desarrollado la presente investigación, podría ́pensarse que este último resultado le da carta de ciudadanía, siendo

52 Los detalles de la demostración se pueden ver en: Kenneth Kunen, Set Theory. An introduction to Independence proofs (London: College Publications, 2011).

toda discusión posterior estéril. En efecto, desde la perspectiva mediante la cual hemos privilegiado el quehacer matemático así sería, pues es de mayor importancia el hecho de no conllevar contradicción que ser no-constructivo. Aún así, es de interés verificar la independencia del axioma de elección de ZF y para ello describiremos la prueba debida a Cohen.

14. *Forcing de Cohen*

El *forcing* es una técnica de construcción de modelos que inventó Cohen para hacer pruebas de consistencia relativa, con la cual demostró que ZFC + ¬ HC[53] es consistente relativa con ZFC; y que ZF + ¬AE es consistente relativa con ZF. Esto permitió culminar la prueba de independencia de ambas proposiciones de ZFC y ZF respectivamente. El procedimiento que guía la utilización del forcing es el siguiente: Si se desea probar que ZFC + φ es consistente relativa con ZFC se supone la existencia de un modelo transitivo y numerable M de ZFC y luego se extiende M a otro modelo transitivo y numerable M [G] de ZFC+ φ tal que M [G] es el menor modelo transitivo de ZFC que contiene a M $\cup$ {G}, donde M [G] y M tienen los mismos ordinales. M [G] se llama la extensión genérica de M correspondiente a G, donde G es un P-genérico sobre M. En resumen, dado un $(P, \leq, 1) \in M$ y un G P-genérico sobre M, se define $M[G] = \{\tau_G : \tau \in M^p\}$ donde M^p es el conjunto de todos los P-nombres de M y τ_G es la interpretación de τ en G. La demostración utiliza herramientas que son identificadas como platonistas[54].

53 HC es la hipótesis del continuo. A saber: No existe un cardinal intermedio entre el cardinal de los números naturales y el de los números reales.

54 El desarrollo de la demostración de manera rigurosa se puede ver en: Franklin Galindo, "Algunos métodos de la lógica y una revisión crítica de los mismos en relación con los fundamentos de las matemáticas," trabajo de ascenso no publicado (Caracas: Universidad Central de Venezuela, 2014), 80.

15. *El axioma de elección en la filosofía contemporánea*

El desarrollo que hemos seguido ha permitido evidenciar la participación que el axioma de elección tiene en las matemáticas y las metamatemáticas contemporáneas. En efecto, hemos mostrado que no se puede bien ordenar a todo conjunto, probar la existencia de un elemento maximal para un conjunto ordenado no vacío tal que todo subconjunto bien ordenado del mismo tenga cota superior, probar el teorema de Tychonoff y probar el teorema de Hahn-Banach sin aceptar el axioma de elección. Así, privilegiando lo que cada área necesita, apreciamos como efectivamente la topología, la teoría de conjuntos y el análisis hacen uso del axioma, para los resultados que estimaron pertinentes. Por ende, el quehacer matemático cotidiano tiene en el axioma de elección un aliado fundamental.

Con el desarrollo de técnicas metamatemáticas y la descripción hecha de las pruebas de Gödel y Cohen, evidenciamos que el axioma es independiente de ZF. Por lo tanto, aunque la metamatemática nos garantiza poder usar el axioma sin riesgo de contradicción, también nos informa que prescindiendo de ella se puede hacer matemática también. Así llegamos a un punto de no retorno en el que recorrido el camino matemático y metamatemático no tenemos una respuesta concreta sobre la necesidad o no del axioma. Se nos plantea una encrucijada: Si se puede usar o prescindir del axioma, ¿qué podemos hacer? ¿Cuál opción tomar y por qué? ¿Cuáles criterios pueden ayudarnos? El axioma parece que no puede ser atrapado ni por la matemática, ni por la lógica, y ni siquiera por la metamatemática, pues es independiente de ZF, el sistema axiomático considerado estándar para explicar a toda la matemática conocida. Visto así y, siguiendo el camino metodológico presentado hasta ahora, consideramos que es el momento oportuno de adentrarnos en el terreno de la filosofía. Es pertinente al respecto citar a Savater, quien plantea lo siguiente:

> Cuando el número de preguntas y su radicalidad arrollan patentemente la fragilidad recelosa de las respuestas disponibles, quizás sea hora de acudir a la filosofía. No tanto por afán dogmático de poner pronto remedio al desconcierto sino para utilizar este a favor del pensamiento: hacernos intelectualmente dignos de nuestras perplejidades es la única vía ́para empezar a superarlas[55].

A estas alturas, es importante referir las posibles relaciones que se pueden establecer entre la filosofía y las matemáticas. En particular, cómo la filosofía atenderá los problemas suscitados por la matemática. Como se ha dejado sentado, nuestro recorrido procede de la matemática hacia la filosofía. Tanto la matemática como la metamatemática han dejado abiertas preguntas que por su naturaleza invitan a ser analizadas por la filosofía, considerando que el quehacer matemático no se detiene si aún no han sido respondidas.

En este sentido, sostenemos la posición según la cual, las relaciones entre la matemática y la filosofía no pueden ser de dependencia, ya sea que la filosofía dependa de la matemática o a la inversa. A veces, por las características peculiares de la matemática, algunos matemáticos, como matemáticos que son, son proclives a hacer filosofía. Esto es loable y respetable, pero se corre el riesgo de hacer, al decir de Torretti, una "filosofía matemática de la matemática", pues usan herramientas y métodos de análisis propios de la matemática en la filosofía[56].

Estamos de acuerdo con Kripke respecto al hecho de

---

55 Fernando Savater, El Valor de Educar (Barcelona: Editorial Ariel, 1997), 8.

56 Torretti lo plantea así: "Movidos por la misma riqueza y audacia de sus invenciones, algunos matemáticos notables se ponen a reflexionar sobre la naturaleza y alcance de su actividad. Su reflexión es lo que se llama filosófica, y así la entienden; pero la conducen como matemáticos que son, aunando libertad y rigor, fantasía ubérrima y precisión pedante, en el estilo propio de su disciplina." Torretti, El paraíso de Cantor, 11.

que "no hay sustituto matemático para la filosofía[57]"´pero esto no justifica que algunas posiciones filosóficas no consideren las características del quehacer matemático. La filosofía posee métodos propios que aplicará al estudio de la matemática, pero la matemática seguirá desarrollándose con sus recursos propios. Abogamos por establecer unas relaciones de **equidad** entre la matemática y la filosofía, por lo que hemos privilegiado el quehacer matemático por sobre las consideraciones ontológicas y epistemológicas. Esto concuerda con algunas consideraciones de la filosofía de la práctica matemática, en los términos planteados por Paolo Mancosu[58]. Peirce resume lo que hemos planteado de la siguiente manera:

> En el sexto libro de la República, Platón sostiene que el carácter esencial de la matemática consiste en la naturaleza y grado peculiares de su abstracción, que es mayor que la de la física, pero menor que la abstracción de lo que hoy llamamos filosofía y Aristóteles sigue a su maestro en esta definición. Desde entonces ha sido costumbre de los metafísicos el enaltecer sus propios razonamientos y conclusiones como muchos más abstractos y científicos que los de los matemáticos. Y sin duda parece que los problemas acerca de Dios, la Libertad y la Inmortalidad son más elevados, por ejemplo, que la cuestión de cuántas horas, minutos y segundos pasarán, antes de que se encuentren dos correos que viajan en determinadas condiciones; de todos modos, no sé´que se haya demostrado nunca esa mayor dignidad[59].

Esta clasificación, al parecer, ha condicionado los estudios

---

57 Citado en Haack, Filosofía de las lógicas, 21.

58 Su estado actual se puede revisar en Paolo Mancosu, "Algunas observaciones sobre la filosofía de la práctica matemática," Disputatio, Philosophical Research Bulletin 5, no. 6 (Dic. 2016): 131-156.

59 Charles S. Peirce, "La esencia de la matemática," en Newman, Sigma, 162.

clásicos en filosofía de la matemática, y la mayor generalización (que Peirce llama abstracción) es guía para la misma. Consideramos que esto por sí solo no explica la complejidad de las relaciones entre las matemáticas y la filosofía. El propio Peirce pone en duda la mayor abstracción de los razonamientos filosóficos por sobre los matemáticos. Lo que deseamos destacar es que el quehacer matemático es el sustento de las consideraciones sobre el axioma de elección, sin dejar de lado lo que la filosofía puede aportar. Peirce cierra su observación así:

> Pero la idea de que los métodos intelectuales de los metafísicos no son, como hechos históricos, muy inferiores en todos los aspectos a los de la matemática, no es más que vana fatuidad. Una curiosa consecuencia de esa noción que ha prevalecido durante gran parte de la historia de la filosofía y según la cual el razonamiento metafísico debe ser como el matemático, pero en más, ha sido que varios matemáticos se han creído, por el hecho de ser matemáticos, calificados para discutir de filosofía y no hay peor metafísica que la suya[60].

Es por ello que hemos respetado el trabajo que los matemáticos han desempeñado y, a partir de allí hemos ido avanzando, sin suponer una relación de subordinación, sino un camino que nos permita aprovechar lo mejor de cada área del saber: de las matemáticas, de la metamatemática y ahora de la filosofía. Este abordaje se observa en la filosofía de la práctica matemática, corriente contemporánea que ha cobrado auge recientemente. Teniendo en cuenta las apreciaciones anteriores, presentaremos el principal argumento desde la filosofía a favor del axioma de elección: el **platonismo matemático**. Junto con ello algunas conclusiones y perspectivas de desarrollo del axioma de elección y del quehacer matemático en lo que va de siglo XXI.

---

60 Peirce, "La esencia de la matemática," 162.

16. *Argumento a favor: Platonismo matemático*

Tal y como lo planteara Mancosu (2016), la filosofía clásica de la matemática se desarrolló alrededor de los programas de fundamentación. A juicio del autor, dos artículos de Paul Benacerraf marcaron la dirección de los estudios en filosofía de la matemática en los últimos cincuenta años. Tratar de explicar cómo, si existen objetos abstractos, tenemos acceso a ellos ha sido desde la perspectiva de Mancosu, lo principal de las discusiones filosóficas contemporáneas. Es decir, tanto la pregunta ontológica (la existencia de tales objetos) como la gnoseológica (el acceso a su conocimiento) se privilegian.

Lo anterior es entendible, pues al pensamiento filosófico le ha interesado sobremanera la particularidad de los objetos con los que trabaja el matemático. A diferencia de los objetos con los que trabajan las ciencias naturales, que se encuentran en la realidad física, los del matemático no se manifiestan en la realidad accesible a los sentidos sino que, en principio, se encuentran en el dominio del pensamiento del matemático[61]. En consecuencia, es natural para la filosofía preguntarse por la existencia de tales entes, y, con mayor razón, cuando ellos no pueden identificarse como abstracción de lo que se observa en la realidad física (por ejemplo, los conjuntos infinitos). ¿Cómo el matemático sabe que tales objetos existen realmente? Si no existen en la realidad física, ¿dónde existen? Y, en caso de que el matemático afirme que sus objetos no poseen relación con la realidad física, entonces ¿con qué la tienen? ¿El matemático puede postular objetos a su arbitrio? ¿O hay criterios racionales que guíen su postulación? Estos cuestionamientos asoman la discusión que Ferreirós apuntase entre lo dado y lo construido en matemáticas, lo que enmarca al platonismo como posición filosófica.

61 Y decimos en principio pues, dependiendo del compromiso platonista que se asuma, se puede pasar de la existencia de los objetos matemáticos en el pensamiento a su existencia en una realidad trascendental, tan real como la espacio-temporal o superior.

Ahora bien, tal y como se ha presentado, la noción de existencia cobra relevancia. Así desde la filosofía se pide alguna justificación racional para aceptar la existencia de las entidades matemáticas. Es importante destacar que el quehacer matemático durante todo el siglo XIX fue constructivo. Pero, como Ferreirós advierte, el desarrollo y consolidación de una matemática abstracta bajo un enfoque conjuntista ya iba apareciendo a finales del siglo XIX, con matemáticos eminentes como Riemann, Dedekind, Noether, Klein, etc., los cuales se encontraban agrupados en su mayoría en la Universidad de Gotinga. Esta perspectiva Ferreirós la explica de la siguiente manera:

> Desde Euclides, la matemática había tenido que ver con construcciones realizables explícitamente, ya fueran construcciones geométricas o analíticas. Con la nueva tendencia se trata, como ya vimos, de la preferencia por los conceptos en lugar de las notaciones, las formas de representación o las construcciones[62].

Fueron algunos matemáticos de la época, quienes, para poder desarrollar sus investigaciones, se impusieron la necesidad de postular entidades para las cuales no se tiene un procedimiento efectivo de construcción. Así, el platonismo matemático forma parte de un hacer que iba surgiendo a finales del siglo XIX e inicios del XX, definido como enfoque abstracto o conjuntista por Ferreirós. En el caso que nos atañe, el autor refiere como la teoría de conjuntos representa la máxima expresión del enfoque abstracto, y muestra al axioma de elección como ejemplo paradigmático de este enfoque. Veámoslo:

> La tensión entre un planteamiento de definición o construcción explícita y uno de análisis abstracto explica las dificultades que encontró el enfoque conjuntista en su implantación progresiva. Ya la noción de función

62 Ferreirós, “El enfoque conjuntista,” 402.

> propuesta por Dirichlet y Riemann avanzaba claramente en la dirección abstracta, pero puede decirse que la teoría de conjuntos se convirtió en epítome del planteamiento abstracto. El ejemplo más característico de ello es el axioma de elección introducido por Zermelo [1904], que, dada una familia infinita cualquiera de conjuntos, postula la mera existencia de cierto tipo de conjunto. El axioma se usa de modo esencial precisamente cuando no hay ningún medio de especificar o definir explícitamente este tipo de conjuntos de elección[63].

Así, las observaciones de Ferreirós nos permiten poner en contexto el surgimiento del platonismo matemático -sin ese nombre aún- entre finales del siglo XIX y principios del XX, representando una *nueva manera de hacer matemática*. Destacamos esto porque, aunque la noción de existencia (ontológica) es vital en el platonismo entendido como filosofía, no lo es entendida como quehacer matemático. Su aparición no se debió a consideraciones ontológicas sino metodológicas: se postulan tales entidades pues son necesarias para la investigación matemática. Y la necesidad se deriva del cada vez mayor nivel de abstracción que las teorías matemáticas iban teniendo. Es a partir de la tercera década del siglo XX cuando de manera explícita se le da un nombre a este nuevo quehacer matemático, siendo caracterizado en una conferencia por Paul Bernays. Como esta conferencia fue la primera en la que se inicia la discusión sobre el platonismo matemático, reviste especial consideración su análisis, pues la mayoría de las consideraciones filosóficas posteriores toman como base lo planteado en ella por el autor.

63 Ferreirós, "El enfoque conjuntista," 404.

17. *Bernays y el término platonismo*

Paul Bernays (1888-1977) fue un matemático y filósofo suizo que dedicó gran parte de su vida a la investigación en torno a los fundamentos de la matemática. Junto con David Hilbert, desarrolló el programa formalista, ensanchando las bases de la teoría hilbertiana de la demostración. El 18 de junio de 1934 dicta una conferencia en la Universidad de Ginebra, en el marco del Ciclo de conferencias internacionales de Ciencias Matemáticas que se desarrollaban en aquella oportunidad. Es allí donde se permite utilizar el término *platonismo* para caracterizar "ciertos modos de razonar peculiares al análisis y a la teoría de conjuntos" mediante los cuales:

> …los objetos de una teoría se tratan como elementos de una totalidad tal que permite razonar como sigue: Para cada propiedad expresable usando las nociones de la teoría es un hecho objetivamente determinado si hay o no un elemento de la totalidad que posea tal propiedad. Asimismo, se sigue de este punto de vista que o bien todos los elementos de un conjunto poseen una determinada propiedad, o bien hay al menos un elemento que no la posee[64].

La cita anterior alude a lo que es central del platonismo matemático: se consideran a los objetos matemáticos libres de cualquier vinculación con las reflexiones del sujeto cognoscente. Bernays indica que "Dado que esta tendencia se basó especialmente en la filosofía de Platón, me permito llamarla platonismo."[65] Desde entonces, el uso -y abuso- del término se ha extendido a lo largo de la reflexión sobre el modo usual de hacer matemática,

---

64 Paul Bernays, El platonismo en matemática, trads. Vincenzo P. Lo Monaco y Benjamín Sánchez (Caracas: Universidad Central de Venezuela, Ediciones de la Biblioteca, 1982), 15 y ss.

65 Bernays, El platonismo, 15 y ss.

llevada a extremos: ya sea asumiendo la existencia de la totalidad de las entidades matemáticas en algún mundo (tan real como el nuestro) o desechándola de plano, abogando por una construcción efectiva de los objetos matemáticos. Como deseamos mostrar, y el propio Bernays así lo hace, lo adecuado es considerar niveles de platonismo, los cuales serán reflejo de los compromisos que asume el matemático para desarrollar su hacer.

Bernays clasifica al platonismo en dos tipos: **platonismo absoluto** y **platonismo moderado**. El platonismo absoluto asume la totalidad de las entidades matemáticas y los conceptos generales de conjunto y función, totalidad para la que se cumple el principio del tercero excluido, esto es que, aún en el caso de no poder demostrarse, se tiene la convicción de que ciertos elementos de la totalidad cumplen o no una propiedad determinada. De no alcanzar a decidirse la proposición objeto de estudio, se promueve la introducción de nuevas asunciones que permitan decidirla. El utilizar asunciones no-constructivistas no supone dificultad alguna, y en nuestro caso, el axioma de elección será aceptado por un platonista absoluto.

El platonismo moderado o metodológico mantiene las características señaladas en el párrafo anterior acerca del platonismo absoluto, pero, a diferencia de éste, evita el principio de comprensión intuitiva, es decir, que para toda propiedad exista el conjunto que cumpla con la propiedad en cuestión. El quehacer matemático contemporáneo se adscribe a un platonismo moderado y, en este sentido, Zermelo es considerado un platonista moderado, siendo Cantor un platonista absoluto. Bernays presenta su clasificación como consecuencia del dominio de objetos que el matemático considere necesario para trabajar. Esto concuerda con lo central de nuestro tratamiento del platonismo: el quehacer cotidiano del matemático y lo que necesite para desarrollar su teoría determinará el nivel de compromiso platónico a asumir.

Más adelante, Bernays indica que el análisis no se limita a la totalidad de los enteros sino que maneja dos nociones que asume como dadas de manera abstracta, es decir, sin atender a sus posibilidades efectivas de definición: conjunto y función. Ambos los define con la palabra *cuasi-combinatorio*, queriendo decir al respecto que se puede, por analogía con lo finito, asumir subconjuntos arbitrarios para el caso infinito. Inmediatamente el autor coloca como ejemplo de esto al axioma de elección, veamos:

> El axioma de elección es una aplicación inmediata de los conceptos cuasi-combinatorios en cuestión Se emplea generalmente en la teoría de los números reales en la siguiente forma particular.Si M1, M2, ... es una secuencia de conjuntos no-vacíos de reales, hay entonces una sucesión a1, a2, ... tal que para cada índice n, an es un elemento de Mn. El principio resulta expuesto a objeciones al exigirse la construcción efectiva de la sucesión de números[66].

Ferreirós, tomando como referencia lo planteado por Bernays, refiere que "el polémico Axioma de Elección puede verse, simplemente, como una consecuencia natural de emplear las nociones de infinito actual y de conjunto (arbitrario o cuasi-combinatorio)."[67] En consecuencia, desde la perspectiva de ambos, el axioma es una asunción platonista que usa las nociones de conjunto y función en sentido abstracto. Bernays coloca al platonismo dentro de una consecución creciente de ámbitos de acción, la cual da los nombres de teoría de números, teoría aritmética de funciones y teoría geométrica del continuo. La primera de ellas no asume la totalidad de los enteros, la segunda sí, pero evita el uso de conceptos cuasi-combinatorios, mientras que la tercera se corresponde con el platonismo ordinario.

Dummett sigue una línea similar de razonamiento cuando

66 Bernays, *El platonismo*, 19.

67 Ferreirós, "Matemáticas y platonismo(s)," 460.

afirma que “la existencia de las estructuras estudiadas en la teoría de los números, en el análisis y en la teoría de los conjuntos, juega un importante papel en las pruebas de todas las ramas de las matemáticas. Estas tres teorías son básicas en el sentido de que son el origen de nuestra aceptación de las totalidades de cardinalidad creciente.[68]” Apreciemos la similitud entre esto y lo planteado por Bernays:

> el sistema de los números naturales es el origen de nuestro concepto de número infinito. De manera similar, el continuo de los números reales representa el origen de la noción de una infinidad no numerable y la teoría de conjuntos un origen más reciente de nuestra noción de infinitos superiores[69].

Queremos llamar la atención al hecho de que, al parecer, Bernays consideraba privilegiada la relación entre el axioma de elección y el conjunto de los números reales. Como hemos mostrado a lo largo de esta investigación, el axioma no limita su ámbito de acción a los números reales sino que va más allá, considerándose como necesaria para toda investigación en matemáticas. Bernays resume las consideraciones que hemos estado haciendo de la siguiente manera:

> Podríamos decir, un tanto toscamente, que el intuicionismo se ajusta a la teoría de números; el método semiplatonista, que hace uso de la idea de la totalidad de los enteros pero evita conceptos cuasi-combinatorios, se ajusta a la teoría aritmética de funciones, y el platonismo ordinario es adecuado para la teoría geométrica del continuo. **Nada hay de sorprendente en esta situación pues es un procedimiento familiar al matemático contemporáneo limitarse en cada dominio de la ciencia a aquellas asunciones que son esenciales[70].**

68 Dummet, “El platonismo,” 286.

69 Dummet, “El platonismo,” 286.

70 Bernays, *El platonismo*, 25.

Resaltamos lo último pues concuerda con las reflexiones que hemos venido haciendo respecto a cómo el platonismo va surgiendo en la escena matemática para sustentar a sus teorías. En este sentido, el platonismo aquí tratado se corresponde con el platonismo interno de Ferreirós. Pero se puede ir más allá, y Bernays lo cree posible pues afirma que:

> Hemos caracterizado solo un platonismo restringido que no pretende ser mas que, por así decirlo, una proyección ideal de un dominio de pensamiento. Pero ahí no queda el asunto. Varios filósofos y matemáticos interpretan los métodos del platonismo en el sentido del realismo conceptual, postulando la existencia de un mundo de objetos ideales que incluye todos los objetos y relaciones de la matemática[71].

En la cita anterior podemos ver un platonismo en el que las entidades existen en el pensamiento y otro en la que existen con independencia de su concepción por parte del matemático. La caracterización se centra en la noción de existencia, lo que es usual en las presentaciones tradicionales que se hacen del platonismo. Observemos que existe una fuerte asociación platonismo-matemática, la cual se ha consolidado durante el siglo XX y se mantiene vigente en lo que va de siglo XXI, junto con el desarrollo exponencial del conocimiento matemático en todas sus áreas; aspectos que han justificado nuestro interés en ahondar sobre las posibles relaciones, alcances y limitaciones de tal asociación.

Por supuesto, la presente investigación limita sus consideraciones al axioma de elección y no al platonismo en sí, pero se reitera que el axioma es consecuencia natural del modo en el que se iba entendiendo la actividad matemática a principios del siglo XX, la cual es *abstracta, bajo un enfoque conjuntista y platonista*. Bernays entendía al platonismo relacionado con el ámbito del trabajo matemático, considerándolo por niveles, cuya

71 Bernays, *El platonismo*, 20.

fuente emanaba de los dominios de objetos que el matemático usaba en sus investigaciones. Ferreirós también establece, a nuestro juicio, observaciones similares que referimos a continuación.

18. Ferreirós: Platonismo interno y platonismo externo

Para Ferreirós, el platonismo interno es aquel en el que "se hace referencia a elementos cuya existencia se postula y se considera dada.[72]" Desde esta perspectiva, al matemático le es indiferente dónde existan tales entidades, sin representar problema alguno el hecho de no poder construirlas. Un platonismo interno acepta que las entidades matemáticas existan en el pensamiento del matemático. Aquí la existencia es entendida como la posibilidad de ser concebido. Y esto es entendible en ese contexto, pues lo que le interesa al matemático es utilizar lo que considere necesario para desarrollar con mayor fuerza su teoría. Siempre que pueda concebir en su pensamiento a tales entidades son bienvenidas.

En el caso del platonismo externo o filosófico, las entidades matemáticas poseen una existencia real, independiente de su postulación por parte del matemático. Ferreirós advierte que el platonismo filosófico ha desarrollado varios enfoques (por ejemplo, el platonismo de Gödel, el de Quine o el de Maddy) los cuales no serán abordados aquí. La realidad a la que hacemos referencia no se corresponde a la realidad física sino a otra realidad, no perceptible por los sentidos. El autor indica al respecto que "el platonismo filosófico postula una bifurcación de la realidad: existe una realidad física perceptible por los sentidos, y una realidad matemática perceptible a la intuición, a un supuesto ojo de la mente."[73]

Las características de tal facultad intuitiva que nos permite acceder a las entidades de esa realidad matemática ha sido objeto

72 Ferreirós, "Matemáticas y platonismo(s)," 446-447.

73 Ferreirós, "Matemáticas y platonismo(s)," 461-462.

de complejas discusiones, y se corresponden con los caminos seguidos por la filosofía clásica de la matemática, tal y como muestra Mancosu (2016). Al respecto, nuestro acercamiento al platonismo se ha generado a través de la práctica matemática, restringiendo nuestro análisis al axioma de elección. Así la existencia *real* del conjunto que postula el axioma no se considera necesaria para la actividad matemática cotidiana; bien puede aceptarse una existencia *ideal* del conjunto.

Esta dualidad de la realidad fue ya establecida por Gregor Cantor, el padre de la teoría de conjuntos, quien, en respuesta a sus críticos, indicó que el matemático:

> atiende única y exclusivamente a la *realidad inmanente* de sus conceptos, es decir, a su aceptabilidad en el dominio del pensamiento puro; se despreocupa completamente de la *realidad trasiente* de los objetos matemáticos, es decir, de su existencia real o su capacidad de representar relaciones o procesos del mundo externo [Cantor 1883, 181].

Cantor nos habla de dos tipos de realidad: la inmanente que correspondería al matemático en activo, teniendo como campo de validación el pensamiento (existe lo que es concebible por la razón humana) y la trascendente (existe independientemente de ser concebido por la razón humana). La relación entre la realidad inmanente y el platonismo interno, así como la realidad trasiente y el platonismo externo es evidente. Cantor tenía la convicción de que las entidades matemáticas poseían no solo una realidad inmanente sino una realidad trasiente, por lo que es posible encontrar matemáticos que se adscriban al platonismo externo o filosófico[74]. Pero la matemática que se desarrolla cotidianamente se hace aceptando un platonismo interno y es la que se ha

74 Es importante observar que las famosas paradojas de la llamada teoría ingenua cantoriana no eran vistas por Cantor como tales, puesto que las inconsistencias eran producto de la limitada capacidad de la razón humana para aprehenderlas.

desarrollado en el quehacer matemático contemporáneo.

Por lo tanto, lo que guía al platonista interno (o platonista matemático) es suponer que la existencia de lo que postule no conlleve alguna contradicción. Ferreirós llama a este platonismo interno ya que toma como referencia la actividad cotidiana del matemático. Así, el interés del matemático reside fundamentalmente en conocer las relaciones posibles entre los objetos que postula y el desarrollo de su teoría. Nuestro platonismo acepta la clasificación hecha por Ferreirós y advierte como en Bernays y Cantor se encuentra presente. Para el caso del axioma de elección, el matemático cotidiano lo acepta como existente idealmente, siempre que no conlleve contradicción. Es decir, un platonismo interno, el cual consideramos legítimo, en atención al desarrollo del quehacer matemático.

Al respecto, es oportuno reflexionar sobre las razones que Cantor esgrimiera para justificar la actividad del matemático. Él consideraba que la introducción de nuevos conceptos en la actividad matemática se guiaba por tres elementos

> (1) Los conceptos elaborados por los matemáticos deben "estar libres de contradicciones internas."
>
> (2) Los nuevos conceptos deben estar relacionados con los antiguos conceptos matemáticos, y si es posible dar cuenta de ellos.
>
> (3) El concepto debe impulsar la ciencia hacia un nuevo nivel, haciéndolo enriquecedor para la teoría[75].

Cantor, un platonista absoluto, no deja al libre arbitrio la introducción de nuevas entidades en la matemática. La teoría que el matemático ha desarrollado y su utilidad para la misma son prioritarias también. No deja de lado lo que el matemático ha desarrollado o deseé desarrollar. Esto es evidencia de una

75 Jesús Mosterín, Los lógicos (Madrid: Editorial Espasa Calpe, 2000), 116.

posición pragmática, y como veremos luego, Zermelo también actuó en dichos términos. Se puede resumir lo anterior en las siguientes palabras de Mosterín "mientras uno no se contradiga y mientras lo que uno haga sirva para algo, todo está permitido en la matemática."[76]

Si analizamos el axioma de elección bajo las tres condiciones cantorianas verificaremos que se cumplen en su totalidad. El axioma de elección está libre de contradicciones, aunque es importante referir que cuando Cantor lo plantease no existía la prueba de su consistencia relativa. Su afirmación se centraba en pedir que el concepto no produjera alguna paradoja. En este sentido, el axioma no parece producirlo. Además, el axioma se relaciona con otros conceptos antiguos tanto de la teoría de conjuntos como de otras ramas de la matemática. Finalmente, el axioma enriquece a la teoría matemática como hemos evidenciado. En consecuencia, el axioma de elección es fácilmente aceptado en los términos que plantease Cantor.

76 Mosterín, Los lógicos, 116.

19. *Conclusiones*

Sostenemos que tanto los resultados matemáticos presentados, la descripción de la prueba de independencia del axioma de elección de ZF y las consideraciones filosóficas sobre el platonismo matemático, en los términos que hemos referido, son argumentos sólidos que nos permiten afirmar la pertinencia del axioma de elección para el quehacer matemático y metamatemático contemporáneo. Es decir, nuestra posición filosófica acepta un platonismo interno para el quehacer matemático cotidiano, siendo suficiente esto para usar el axioma de elección en el ámbito matemático. Todo lo anterior se refuerza dentro de una práctica matemática considerada como privilegiada y en la que, dada su cada vez mayor nivel de abstracción, es natural el postular entidades para las que no se les puede dar medio de construcción. Así nuestras justificaciones se pueden entender a lo interno de la actividad matemática y fuera de ella. Sobre esto Maddy ha hecho un análisis sucinto que permite fortalecer las consideraciones previas y que analizamos a continuación.

20. *Maddy: Justificaciones extrínsecas e intrínsecas*

La autora, en su libro *Naturalism in Mathematics* (1998), realiza un análisis de los axiomas que denomina estándar, los cuales son los axiomas de ZF con elección. Su objetivo es presentar los argumentos usuales a favor de ellos. Al respecto considera que se puede hacer una distinción entre dos tipos de justificaciones: la intrínseca y la extrínseca. Afirma que:

> Algunos observadores, siguiendo la tradición, han dictaminado que las únicas justificaciones legítimas son las intrínsecas. Mi propia conclusión es que esto último es incorrecto[77].

77 Penelope Maddy, Naturalism in Mathematics (Oxford: Clarendon Press, 1997),

Por los ejemplos que Maddy refiere, se infiere que las consideraciones intrínsecas son aquellas que justifican al axioma por sí mismo, mientras que las extrínsecas precisan las consecuencias que su aceptación tiene para la teoría matemática. Que las justificaciones intrínsecas hayan sido favorecidas por la tradición analítica por sobre las extrínsecas, es evidencia de la preponderancia que se da a las consideraciones filosóficas sin atender el contexto matemático en el que se desarrollan los axiomas. Acompañamos la conclusión de Maddy y este artículo brinda elementos que abonan el terreno para una reflexión filosófica que toma en cuenta consideraciones matemáticas.

En este orden de ideas, recordemos que Zermelo postuló sus axiomas en 1908 para "recuperar en su totalidad la teoría creada por Cantor y Dedekind." Basando la defensa de sus axiomas en que son "necesarios para la ciencia."[78] Así su postulación de los axiomas (entre ellos el de elección) tuvo como norte el tomar lo que considerase necesario para hacer matemática, en especial un hacer matemático para la teoría de conjuntos cantoriana (sin las paradojas). En consecuencia, el axioma de elección es de natural aceptación en ese contexto y así sostenemos que lo entendía Zermelo.

Más aún, Torretti, analizando la teoría de los tipos lógicos de Russell, hace una consideración similar a la del párrafo anterior, pues refiere que "Zermelo postula la existencia de un mínimo de conjuntos que le parecen imprescindibles para hacer matemáticas, y presume que su teoría es inocente de contradicciones hasta que no se le demuestre culpable."[79] Y en una nota al pie agrega:

> Subrayo que los axiomas de Zermelo no se eligen, como en la teoría russelliana del zigzag, solo con vistas a prevenir las contradicciones conocidas. Zermelo

37.

78 Citado en Maddy, Naturalism in Mathematics, 36.

79 Torretti, El paraíso de Cantor, 186.

> tiene un cometido -hacer matemáticas- y postula lo que necesita para eso. Su selección se ha probado duradera. En cambio, Russell, que buscaba certificar -como si hiciera falta- las matemáticas hechas por otros, daba solamente con axiomas implausibles, inspirados por un principio que él mismo juzgaba insuficiente[80].

Como se puede apreciar, Torretti sigue una línea similar de razonamiento al de Maddy y se complementa con nuestro tratamiento del tema, pues somos reiterativos en no dejar de lado la actividad del matemático, sino incorporarlos a la reflexión filosófica. Entendido en estos términos, el axioma de elección es justificable tanto por sí mismo como por sus consecuencias y es por ello que la clasificación de Maddy nos parece apropiada. Más aún, ambos aspectos consolidan las conclusiones a las que hemos arribado. Démosle finalmente la palabra al propio Zermelo y analicemos sus consideraciones a favor de la asunción del axioma enmarcadas en lo planteado.

21. *Zermelo: Respuesta a sus críticos*

Para analizar las justificaciones que Zermelo diera sobre el axioma de elección, debemos considerar tres momentos: cuando enuncia el axioma como parte de la demostración del teorema del buen orden en 1904, cuando presenta su primer sistema axiomático en 1908 (formando parte el axioma de elección), y cuando elabora su segundo sistema axiomático en 1930, en el que de manera explícita prescinde de postular el axioma en tal sistema.

Torretti refiere que Zermelo afirma que no puede forzar a nadie a aceptar al axioma pero que, a su entender, reúne los tres requisitos que justifican la adopción de un postulado en matemáticas, a saber:

80 Torretti, El paraíso de Cantor, 186.

> (a) con frecuencia ha sido utilizado tácitamente en diversos campos de las matemáticas y especialmente en teoría de conjuntos.
>
> (b) es evidente de suyo
>
> (c) responde a una necesidad científica pues son muchas las proposiciones importantes que se ́lo pueden demostrarse invocándolo[81].

Siguiendo la clasificación de Maddy, los argumentos (a) y (b) son justificaciones intrínsecas mientras que (c) es ́extrínseca. Torretti sostiene que sólo el tercer argumento ha demostrado tener verdadera fuerza mas no explica el porqué de ello. A continuación presentaremos una interpretación que sustentará la referida afirmación.

22. ***El axioma de elección y su autoevidencia***

En el caso del argumento (b), la autoevidencia o naturalidad del axioma de elección es, a nuestro entender, difícil de sostener, pues no es fácil explicar en que podrá consistir tal naturalidad. Si es necesario explicarlo entonces no es tan evidente como pareciese. Zermelo la sustenta apoyándose en el argumento (a), explicando lo siguiente:

> Es un hecho indisputable que este axioma, aunque nunca ha sido presentado al estilo de los libros de texto, ha sido usado antes, y además con éxito, en los más diversos campos de la matemática, especialmente en la teoría de conjuntos, por Dedekind, Cantor, F. Bernstein, Schoenflies, J. Konig y otros...Un uso tan extenso del principio puede explicarse únicamente por su autoevidencia[82].

81 Torretti, El paraíso ́de Cantor, 67.

82 Maddy, Naturalism in Mathematics, 54.

Así, para Zermelo, el hecho de que el axioma se haya usado de manera tácita es evidencia de su naturalidad. Hasta que punto esto es suficiente para dar fuerza al argumento es lo que se pone en duda. Consideremos al respecto lo que sucede con la mayoría de la comunidad de matemáticos que trabaja en las áreas de lógica matemática y teoría de conjuntos actualmente. Para decidir si incorporan o no un candidato a axioma (luego de realizarle pruebas de consistencia relativa o independencia) estiman si el mismo es intuitivo, natural o evidente. Bagaria se pregunta: "¿Qué debe ser tenido como un axioma natural de la teoría de conjuntos?"[83] Y responde: "Ciertamente cualquier hecho *intuitivamente obvio* acerca de los conjuntos."[84] En este sentido, considera que los axiomas de ZF son intuitivos, y con respecto al tema que nos ocupa, observa la reticencia que el axioma de elección genera en algunos matemáticos que lo rechazan -a su juicio- por las consecuencias contraintuitivas que conlleva más que por su propia naturaleza, la cual considera, por cierto, *muy natural*.

Llama la atención que Bagaria no indicase de manera directa por qué considera al axioma de elección natural[85]. Más aún cuando, si seguimos su criterio, no parecería a primera vista que el axioma de elección proveyera algún hecho obvio acerca de los conjuntos. Se podría considerar -hasta cierto punto- obvio a axiomas que permitan la existencia de un conjunto vacío, de un conjunto infinito, de un subconjunto de un conjunto dado, del conjunto de los subconjuntos de un conjunto dado, que la unión de conjuntos sea un conjunto y que se acepte que dos conjuntos con los mismos elementos sean iguales. Pero, a nuestro entender,

---

83 Joan Bagaria, Natural Axioms of set theory and the continuum problem (Barcelona: Universidad de Barcelona, 2004), 3.

84 Bagaria, Natural Axioms, 3.

85 Tan solo refiere que una posición distinta se puede consultar en: Kai Hauser, "Is Choice Self-Evident?," American Philosophical Quarterly 42, no. 4 (Oct. 2005): 237-261.

no parece obvio que exista un conjunto -infinito- formado por la elección de un elemento de cada conjunto de una familia -infinita- de conjuntos no vacíos. Esta caracterización tan particular del conjunto que postula el axioma pone en cuestionamiento la obviedad del mismo.

Por todo lo expuesto, los argumentos (a) y (b) no se han podido sostener en el tiempo y el propio Zermelo admite su debilidad pues "esa autoevidencia es hasta cierto punto subjetiva,"[86] Así, emprende su justificación extrínseca (la necesidad del axioma para la ciencia). Para dar mayor fuerza a lo planteado, observemos que, en la actualidad, existen candidatos a nuevos axiomas (axiomas de grandes cardinales, axioma de Forcing propio, axioma de Martin máximo, etc.) que siguen sin ser aceptados como axiomas, mientras que el de elección sí. ¿Por qué sucede esto? La poca naturalidad de los candidatos a axiomas es lo que -se dice- impide su aceptación. Pero ese criterio no se impuso sobre el axioma de elección pues sí es aceptado a pesar de no ser obvio, al menos no en el sentido de Bagaria. Lo que ha sido determinante para su aceptación es su presencia activa dentro del quehacer matemático a través de toda una serie de resultados en diversas áreas matemáticas. Esto no es otra cosa que su necesidad científica, el argumento (c) de Zermelo.

23. El axioma de elección y su necesidad para la ciencia

Zermelo postuló sus axiomas buscando lo mínimo necesario para hacer matemáticas, justificando el axioma de elección "objetivamente" por su necesidad científica. Veamos:

> Pero la cuestión que puede ser decidida objetivamente es si el principio es necesario para la ciencia. Ahora quisiera someterlo a juicio presentando un número de

86 Maddy, Naturalism in Mathematics, 55.

> teoremas y problemas elementales y fundamentales que, en mi opinión, no podrían resolverse sin el principio de elección[87].

A estos resultados se han agregado muchos más, que sustentan el desarrollo matemático contemporáneo. Que el axioma no sea constructivo no fue limitativo para Zermelo, pues consideraba más importante la riqueza en resultados que ofrece. Así, desde la perspectiva que hemos analizado, Zermelo actuó de manera coherente con el enfoque abstracto o platonista, aceptando un platonismo interno y privilegiando lo que el quehacer matemático necesitase. Observemos esto en lo siguiente:

> ...nadie tiene derecho a impedir que los representantes de la ciencia productiva continúen usando esta "hipótesis"- pueden llamarla así si quieren- y llevando sus consecuencias lo más lejos posible... Simplemente necesitamos separar los teoremas que requieren del axioma de los que pueden ser probados sin él para poder delimitar la totalidad de la matemática de Peano como una rama especial, como una ciencia artificialmente mutilada, por decirlo así...l**os principios deben ser juzgados desde el punto de vista de la ciencia, y no la ciencia desde el punto de vista de principios fijados de una vez por todas. (Zermelo, 1908a)[88].**

El extracto nos permite afirmar que, para Zermelo, no hay primacía de la filosofía por sobre la ciencia. Así el punto de vista de la ciencia fue la guía principal de Zermelo para defender la pertinencia del axioma de elección. Podemos concluir diciendo que de los tres argumentos presentados por Zermelo, sólo el tercero parece ser defendible con mayor propiedad, y además refleja la coherente posición de él.

87 Maddy, Naturalism in Mathematics, 55.

88 Maddy, Naturalism in Mathematics, 56.

24. Zermelo y el axioma de elección en 1930

En 1930 Zermelo presenta en su artículo titulado *Sobre números-límite y dominios de conjuntos* un nuevo sistema axiomático, tomando como referencia el de 1908 pero sin incluir al axioma de elección en su lista de axiomas, arguye que lo excluye porque "tiene otro carácter que los demás y no sirve para delimitar los dominios de los modelos"[89] y agrega que el axioma es "un principio lógico universal presupuesto por toda nuestra investigación."[90]

Nos preguntamos: ¿Cuál es ese carácter que lo diferencia de los demás axiomas? Si es un principio lógico universal, ¿Posee un estatus superior al de axioma? De ser así, ¿por qué?, ¿Qué lo hace universal? ¿A cuál lógica se refiere Zermelo? Hemos estimado pertinente establecer como posible carácter diferenciador, dentro de lo que Zermelo argumentara, lo que sigue: los axiomas que se postulan son los que permiten determinar lo mínimo necesario para hacer matemáticas. Ahora bien, el axioma de elección difiere de ellos pues no permite delimitar los dominios de los modelos, ni el conjunto que postula es estrictamente necesario para hacer matemática finitaria, pero sí permite hacer uso de lo que hay con mayor potencia, sobre todo porque involucra al axioma del infinito, el cual Zermelo no declara al inicio pero que se ve forzado a admitirlo como "postulado metateórico." En consecuencia, para hacer **matemática infinitaria** con todas las posibilidades que conlleva es requerido necesariamente el axioma de elección. El surgimiento de la nueva forma de hacer matemática (platonista) requiere del axioma y en este sentido se entiende que Zermelo lo "presuponga" para toda su investigación.

Así hemos analizado el recorrido hecho por Zermelo en tres momentos: 1904, 1908 y 1930. Es relevante resaltar, sobre la génesis del axioma de elección, la siguiente cita de Ferreirós:

89 Torretti, El paraíso de Cantor, 102.

90 Torretti, El paraíso de Cantor, 102.

> Zermelo (1904, 516) era explícito al afirmar que la idea de basar la demostración en el axioma de elección se debe a Schmidt. Al final de su vida, Zermelo se quejaría de que muchas de sus contribuciones en lógica y teoría de conjuntos no eran tenidas en cuenta, mientras que su nombre aparece sólo asociado a un axioma cuya autoría nunca había reclamado[91].

Y refiere que su aparición se debe a los debates surgidos entre Zermelo y Erhard Schmidt (1876-1959) una semana antes del 24 de septiembre de 1904, fecha de la carta que envió Zermelo a Hilbert (donde prueba el teorema del Buen orden), siendo Schmidt quien le hiciera la sugerencia de usar el axioma de elección en la prueba. Después de 1930, Zermelo no publicó más hasta el día de su muerte. Fraenkel, citado por Torretti, refiere que en algún momento, seguramente de los años 1940 o 1950, le preguntó a Schmidt por qué su buen amigo Zermelo ya no publicaba; la respuesta fue que no lo hace "porque ya no podía enfadar a nadie con sus publicaciones."[92] Así el axioma de elección fue polémico y al parecer el hombre que lo enunció era amante de la polémica también.

Para finalizar, queremos advertir que Maddy analiza la llamada concepción reiterativa (también llamada iterativa, teoría de niveles o jerarquía acumulativa) la cual, a su juicio, es la base del sistema axiomático presentado en 1930. Hay diferencias entre el sistema axiomático de 1908 y el de 1930. Maddy afirma que "la concepción reiterativa subyace a la jerarquía acumulativa de Zermelo (1930) como un principio que fundamenta los axiomas con más firmeza que la mera justificación extrínseca presentada en 1908."[93]

91 José Ferreirós, "Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904." La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española 7, no. 2 (2004): 462.

92 Ferreirós, "Un episodio de la crisis de fundamentos," 462.

93 Un análisis de esto se puede apreciar en Maddy, Naturalism in Mathematics, 42.

Maddy confirma que la justificación principal en Zermelo para los axiomas en 1908 es la extrínseca (necesidad para la ciencia) pero le da a la concepción iterativa mayor fuerza que lo extrínseco. Entendiéndose la concepción iterativa como una justificación intrínseca, en la medida en que intenta explicar la naturaleza de los conjuntos, valdría la pena preguntarse si el axioma de elección también se puede describir bajo esa concepción. Al respecto, George Boolos, quien ha desarrollado con fuerza la teoría de niveles, ha probado que "el axioma de elección no se puede deducir de la teoría de niveles"[94] lo que nos confirma la certera intuición de Zermelo al no colocarlo como parte de sus axiomas de 1930 y muestra, además, el "otro caracter" del axioma de elección.

A modo de resumen podemos referir lo siguiente: El axioma de elección no se restringe a un área particular de las matemáticas, siendo su aplicabilidad alta y variada. Además, aparece en la lógica de primer orden. Esta particular "independencia" del axioma respecto a algún área se confirma con los resultados de Gödel y Cohen que establecen su independencia lógica de ZF. A nivel filosófico, el axioma es una clara asunción platonista que hace uso de las nociones de conjunto y función abstractas, trabajando con el infinito actual. Y como hemos visto, se diferencia sobremanera de los restantes axiomas por no delimitar los dominios de los modelos y ni siquiera reflejarse bajo la concepción iterativa tal y como Boolos mostrase. El ser tan esquivo en su explicación realza su caracter único y se entiende la polémica generada.

El camino que hemos recorrido, primero matemático, luego lógico, posteriormente metamatemático y finalmente filosófico se ha hecho con la intención de respetar y rescatar los aportes de lo que hemos denominado quehacer matemático. Lo que el matemático tenga a bien utilizar para su actividad y las razones para hacerlo,

94 Véase: George Boolos, "The Iterative Conception of Set," en Logic, Logic, and Logic, ed. Richard Jeffrey, (Cambridge: Harvard University Press, 1971).

dentro de su contexto, han sido fundamentales para la reflexión filosófica. Con esta posición, nos acercamos a los planteamientos de la filosofía de la práctica matemática, en los términos de Mancosu (2016) y Tymoczcko (1997). Así, la pertinencia del axioma de elección para la matemática y la metamatemática contemporánea queda justificada, y esta justificación nos permitió además proponer una revisión de las relaciones existentes entre la filosofía y la matemática. Esto nos permite afirmar que el axioma de elección se mantendrá vigente hasta tanto las condiciones de la actividad matemática no cambien, y que el desarrollo de la práctica matemática será acicate fundamental para la filosofía de la matemática en este siglo XXI.

Epílogo: Problemas abiertos sobre el axioma de elección

Para finalizar, y como muestra de la vigencia a la que hacemos referencia en el párrafo anterior, queremos referir algunos focos de investigación actuales sobre el axioma de elección, vinculados con la teoría de Ramsey. En efecto, algunos hechos y problemas abiertos sobre la relación entre versiones débiles del axioma de elección ("Existen ultrafiltros no principales sobre N", "Existen ultrafiltros sobre N", "Principio de elecciones dependientes", etc.) y Propiedades de Ramsey (Bernstein, Polarizada, Subretículo, Ramsey, Ordinales flotantes, etc.) están en pleno desarrollo en la actualidad[95]. Ellos son muestra de la plena actividad, vigencia y pertinencia del axioma de elección, el cual, aún en medio del debate, se ha ganado su puesto dentro del quehacer matemático, metamatemático y filosófico contemporáneo.

95 Se pueden revisar dichos problemas abiertos en: 1) Carlos Augusto Di Prisco, "Mathematics versus Metamathematics in Ramsey Theory of the real numbers," en Logic, Methodology and Philosophy of Science Proceedings of the Twelfth International Congress, eds. Petr Hájek, Luis Valdés-Villanueva, Dag Westerståhl (London: College Publications, 2005), 171-188; 2) Franklin Galindo, "Tópicos de Ultrafiltros," Divulgaciones Matemáticas 21, no. 1-2 (2020): 54-77; 3) Carlos Augusto Di Prisco y Franklin Galindo, "Perfect set propiertes in models de ZF," Fundamenta Mathematicae 208, no. 3 (2010): 249-262; 4) Carlos A. Di Prisco y James M. Henle, "Doughnuts, Floating Ordinals, Square Brackets and Ultraflitters," The Journal of Symbolic Logic 65, no. 1 (Mar. 2000): 461-473; 5) Carlos Augusto Di Prisco y James M. Henle, "Partitions of the reals and choice," en Models, algebras, and proofs, eds. Xavier Caicedo y Carlos Montenegro (New York: Marcel Dekker, 1999): 13-24.

Bibliografía

Alemán Pardo, Anastasio. "El argumento de indispensabilidad en matemáticas." *Teorema*, 18, no. 2 (1999): 49-61.

Alemán Pardo, Anastasio. *Lógica, matemáticas y realidad*. Madrid: Editorial Tecnos, 2011.

Álvarez Velasco, Ana. "Axioma de elección y Teoría de la Medida." Tesis de Licenciatura. México: Facultad de Ciencias, UNAM, 2003.

Álvarez Velasco, Ana y Miguel Ángel Mota Gaytán. "Forcing. Otros mundos posibles." *Ciencias*, no. 78 (abril-junio 2005): 66-73.

Aristóteles. *Opera*. Vol. 2, *Aristoteles Graece Ex recognitione Immanuelis Bekkeri*. Berlín: Georgium Reimer, 1831.

Aristóteles. *Tratados de Lógica (El Organon)*. México: Editorial Porrúa, 1993.

Asse Dayán, Jacobo. "El ficcionalismo hermenéutico en la filosofía de las matemáticas." Tesis de Maestría. México: Facultad de Filosofía y Letras, UNAM, 2008.

Asse Dayán, Jacobo. "Naturalismo, ficción y objetos matemáticos." *Signos filosóficos* 13, no. 25 (enero-junio 2011): 47-71.

Bagaria, Joan. *Natural Axioms of set theory and the continuum problem*. Barcelona: Universidad de Barcelona, 2004.

Batistella, Ernesto H., trad. *Selección de textos de Gottlob Frege*. Zulia: Universidad del Zulia, 1972.

Batistella, Ernesto H., Vincenzo P. Lo Monaco y B. Sánchez M. *Brouwer, Wittgenstein, Lakatos: Tres concepciones de la matemática*. Caracas: Instituto de Filosofía U.C.V., 1988.

Bell, John L. *The axiom of choice*. Londres: College Publications, 2009.

Benacerraf, Paul y Hilary Putnam, eds. *Philosophy of Mathematics: Selected Readings*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.

Bernal González, Luis y Tomás Domínguez Benavides. *Nociones de análisis funcional*. Sevilla: Universidad de Sevilla, Departamento de Análisis Matemático, 2010.

Bernays, Paul. *El platonismo en matemática*. Traducido por Vincenzo P. Lo Monaco y Benjamín Sánchez. Caracas: Universidad Central de Venezuela, Ediciones de la Biblioteca, 1982.

Bollobás, Béla, ed. *Littlewood's Miscellany*. Cambridge: Cambridge University Press, 1986.

Boolos, George. "The Iterative Conception of Set." En *Logic, Logic, and Logic,* editado por Richard Jeffrey. Cambridge: Harvard University Press, 1971.

Caba Sánchez, Antonio. "Algunas consideraciones sobre el argumento de indispensabilidad en matemáticas." *Revista de Filosofía* 27, no. 1, (2002): 111-133.

Caicedo, Xavier y Germán Enciso. "El Teorema de Hahn-Banach como principio de elección." *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias* 28, no. 106 (Marzo 2004): 11-20.

Cantor, Georg. "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre." *Mathematische Annalen* 46, (November 1895): 481-512.

Cantor, Georg. "Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre." *Mathematische Annalen* 49, (June 1897): 207-246.

Cantor, Georg. *Fundamentos para una teoría general de conjuntos: escritos y correspondencia selecta.* Traducido por José Ferreirós y Emilio Gómez-Caminero. Barcelona: Editorial Crítica, 2005.

Cantor, Georg. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin: Springer-Verlag, 1932.

Carnap, Rudolf. "Die logizistische Grundlegung der Mathematik." *Erkenntnis* 2, (1931): 91-105.

Chang, C. C. y Jerome Keisler. *Model Theory*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2012.

Chela, Raimundo. *Matemáticas y lógica*. Caracas: Fondo Editorial Acta Científica Venezolana, 1986.

Cohen, Paul J. "The independence of the continuum hypothesis." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 50, no. 6 (December 1963): 1143-1148.

Cohen, Paul J. "The independence of the continuum hypothesis, II." *Proceedings of the National Academy of Sciences* 51, no. 1 (January 1964): 105-110.

Courant, Richard y Herbert Robbins. ¿Qué es la matemática? Una exposición elemental de sus ideas y métodos. Traducido por Luis Bravo Gala. Madrid: Aguilar, 1962.

Crespin, Daniel. "Axioma de Elección y Lema de Zorn." En *Cartillas Matemáticas*, 1-20. Caracas: Escuela de Matemáticas, Univesidad Central de Venezuela, 2007.

De Lorenzo, Javier. "Del hacer matemático y sus filosofías." *ILUIL* 26, (2003): 903-917.

De Lorenzo, Javier. *La matemática: de sus fundamentos y sus crisis*. Madrid: Editorial Tecnos, 1998.

Dedekind, Richard. *Was sind und sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg, 1888.

Di Prisco, Carlos Augusto. *Introducción a la Lógica Matemática*. Manaos: EMALCA, 2009.

Di Prisco, Carlos Augusto. “Mathematics versus Metamathematics in Ramsey Theory of the real numbers.” En *Logic, Methodology and Philosophy of Science Proceedings of the Twelfth International Congress*, editado por Petr Hájek, Luis Valdés-Villanueva y Dag Westerståhl, 171-188. London: College Publications, 2005.

Di Prisco, Carlos Augusto. *Teoría de Conjuntos*. Caracas: Universidad Central de Venezuela, Consejo de Desarrollo Científico y Humanístico, 2008.

Di Prisco, Carlos Augusto. *Una introducción a la teoría de conjuntos y los fundamentos de la matemática*. Vol. 20. Campinas: Coleção CLE, 1997.

Di Prisco, Carlos Augusto y Franklin Galindo. “Perfect set propiertes in models de ZF*.” Fundamenta Mathematicae* 208, no. 3 (2010): 249-262.

Di Prisco, Carlos Augusto y James M. Henle. “Doughnuts, Floating Ordinals, Square Brackets and Ultraflitters.” *The Journal of Symbolic Logic* 65, no. 1 (Mar. 2000): 461-473.

Di Prisco, Carlos Augusto y James M. Henle. “Partitions of the reals and choice.” En *Models, algebras, and proofs*, editado por Xavier Caicedo y Carlos Montenegro, 13-24. New York: Marcel Dekker, 1999.

Dummet, Michael. “El platonismo.” En *La verdad y otros enigmas*, traducido por Alfredo Herrera Patiño, 282-295. México: Fondo de Cultura Económica, 1990.

Enderton, Herber B. *Una Introducción Matemática a la Lógica*. Traducido por José Alfredo Amor Montaño. México: Universidad Nacional Autónoma de México, 2004.

Ferreirós, José. “El enfoque conjuntista en matemáticas.” *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática* 1, no. 3 (1998): 389-412.

Ferreirós, José. “Matemáticas y platonismo(s).” *La Gaceta de la*

Real Sociedad Matemática Española 2, no. 3 (1999): 446-473.

Ferreirós, José. "Un episodio de la crisis de fundamentos: 1904." *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 7, no. 2 (2004): 449-467.

Fraenkel, Adolf. "Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre." *Mathematische Annalen* 86, (September 1922): 230-237. (Reproducido en Felgner 1979).

Galindo, Franklin. "Algunos métodos de la lógica y una revisión crítica de los mismos en relación con los fundamentos de las matemáticas." Trabajo de ascenso no publicado. Caracas: Universidad Central de Venezuela, 2014.

Galindo, Franklin. "Tópicos de Ultrafiltros." *Divulgaciones Matemáticas* 21, no. 1-2 (2020): 54-77.

Galindo, Franklin. "Tres tópicos de Lógica." Trabajo de ascenso no publicado. Caracas: Universidad Central de Venezuela, 2012.

Garciadiego, Alejandro R. "Philip Jourdain, Historiador de las matemáticas." *LLULL* 22, no. 43 (1999): 193-199.

Gödel, Kurt. "La consistencia del Axioma de Elección y la Hipótesis generalizada del continuo con los axiomas de la teoría de conjuntos (1940)." En *Obras Completas*. Madrid: Alianza, 1981.

Haack, Susan. *Filosofía de las lógicas*. Traducido por Amador Antón y Teresa Orduña. Madrid: Ediciones Cátedra, 1991.

Halmos, Paul R. *Naive set theory.* New York: Springer, 1974.

Halpern, J. D. y A. Levy. "The boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice." En *Axiomatic Set Theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,* editado por Dana S. Scott. Vol. 13, Part 1, 83-134. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1971.

Hauser, Kai. “Is Choice Self-Evident?” *American Philosophical Quarterly* 42, no. 4 (Oct. 2005): 237-261.

Herrlich, Horst. *Axiom of choice*. Berlin: Springer, 2006.

Heyting, Arend. “Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik.” *Erkenntnis* 2, (1931): 106-115.

Heyting, Arend. *Introducción al Intuicionismo*. Traducido por Víctor Sánchez de Zavala. Madrid: Editorial Tecnos, 1976.

Hilbert, David. *Fundamentos de las Matemáticas*. Traducido por Luis Felipe Segura. México: UNAM, 1993.

Hilbert, David. *Gesammelte Abhandlungen*. Vol. 3. New York: Chelsea Publishing, 1965. (Reimpresión de la edición original: Berlin, Springer, 1933-35).

Horsten, Leon. “*Philosophy of Mathematics*.” En *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Stanford University, 1997-. Artículo publicado September 25, 2007; revisión September 26, 2017. https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/philosophy-mathematics.

Howard, Paul y Jean E. Rubin. *Consequences of the Axiom of Choice*. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1998.

Jané, Ignacio. “¿De qué trata la teoría de conjuntos?” En *Filosofía de la lógica*, editado por Raúl Orayen y Alberto Moretti, 247-276. Madrid: Editorial Trotta, 2004.

Jech, Thomas J. *The Axiom of Choice*. Mineola, N.Y.: Dover Publications, 2008.

Jech, Thomas J. *Set Theory*. Berlin: Springer, 2006.

Johnstone, P. T. “Tychonoff’s Theorem without the axiom of choice.” *Fundamenta Mathematicae* 113, no. 1 (1981): 21-35.

Kneale, William y Martha Kneale. *El desarrollo de la lógica*.

Traducido por Javier Muguerza. Madrid: Editorial Tecnos, 1980.

Körner, Stephan. *The philosophy of mathematics: an introductory essay*. London: Hutchinson University Library, 1971.

Kunen, Kenneth. *Set Theory. An introduction to Independence proofs*. London: College Publications, 2011.

Lecea Blanco, Rufino. "Ontología y significado en Michael Dummett: Una filosofía del lenguaje." Tesis Doctoral. España: Facultad de Filosofía, UNED, 2011.

Lehman, Hugh. *Introduction to the philosophy of mathematics*. Oxford: Rowman & Littlefield, 1979.

Levi, Beppo. *Leyendo a Euclides*. Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2003.

Lewin, Renato A. *Teoría axiomática de conjuntos*. Chile: Universidad Católica de Chile, 2004.

Lindström, Sten, Erik Palmgren, Krister Segerberg y Viggo Stoltenberg-Hansen, eds. *Logicism, Intuitionism, and Formalism: What has become of them?* Dordrecht: Springer, 2009.

Łoś, J. y Czesław Ryll-Nardzewski. "On the application of Tychonoff's theorem in mathematical proofs." *Fundamenta Mathematicae* 38, no. 1 (1951): 233-237.

López Abad, Jordi y Carlos Augusto Di Prisco. *Teoría de Ramsey y Espacios de Banach*. Mérida, Venezuela: EMALCA, 2008.

Łukasiewicz, Jan. *Estudios de lógica y filosofía*. Madrid: Biblioteca de la Revista de Occidente, 1970.

Maddy, Penelope. *Naturalism in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 1997.

Mancosu, Paolo. "Algunas observaciones sobre la filosofía de

la práctica matemática." *Disputatio, Philosophical Research Bulletin* 5, no. 6 (Dic. 2016): 131-156.

Manzano, María. *Teoría de Modelos*. Madrid: Alianza Editorial, 1989.

Marcus, Marvin y Henryk Minc. *Elementos de álgebra lineal*, México: Editorial Limusa. 1971.

Martin-Löf, Per. "100 years of Zermelo's axiom of choice: what was the problem with it?" *The Computer Journal* 49, no. 3 (May 2006): 345-350.

Martínez-Adame, Carmen. "¿Es necesario el Axioma de Zermelo para comprender la Teoría de la Medida?" *Metatheoria – Revista de Filosofía e Historia de la Ciencia* 3, no. 2 (2013): 37-64.

Moore, Gregory H. "A house divided against itself: the emergence of first-order logic as the basis for mathematics." En *Studies in the History of Mathematics*, editado por Esther R. Phillips, 98-136. Washington, D.C.: Mathematical Association of America, 1987.

Moore, Gregory H. *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence*. New York: Springer, 1982.

Mosterín, Jesús. *Los lógicos*. Madrid: Editorial Espasa Calpe, 2000.

Nagel, Ernst y James R. Newman. *El Teorema de Gödel*. Madrid: Editorial Tecnos, 2005.

Peano, G. "Demonstration de i'integrabilite des equations difterentielles ordinaire." *Mathematische Annalen* 37, (1890): 182-228.

Peirce, Charles. "La esencia de la matemática." En *Sigma: El mundo de las matemáticas*. Volumen 5, editado por James R. Newman, 155-171. Barcelona: Editorial Grijalbo, 1976.

Pérez, Juan Antonio. "Los Teoremas de Tychonoff y de los productos conexos son equivalentes." *Revista de Matemática: Teoría y aplicaciones* 23, no. 1 (2016): 1-10.

Pincus, David. "The strength of the Hahn-Banach theorem." En *Victoria Symposium on Non-Standard Analysis*. *Lecture Notes in Mathematics*, editado por Albert Hurd y Peter Loeb. Vol. 369, 203-248. Berlin: Springer-Verlag, 1974.

Rubin, Herman y Jean E. Rubin. *Equivalents of axiom of choice*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1970.

Savater, Fernando. *El Valor de Educar*. Barcelona: Editorial Ariel, 1997.

Sieg, Wilfried. Hilbert's Program and Beyond. New York: Oxford University Press, 2013.

Solovay, Robert M. "On the cardinality of sets ∑_2^1 of reals." En Foundations of Mathematics. Symposium Papers commemorating the sixtieth birthday of Kurt Gödel, editado por Jack J. Bullof, Thomas C. Holyoke y Samuel W. Hahn, 58-73. Berlin: Springer, 1969.

Solow, Daniel. The Keys to Advanced Mathematics: Recurrent Themes in Abstract Reasoning. Mansfield, OH: BookMasters, 1995.

Torreti, Roberto. "El Método Axiomático." En La Ciencia, estructura y desarrollo, editado por César Ulises Moulines, 89-91. Madrid: Editorial Trotta, 1993.

Torreti, Roberto. *El Paraíso de Cantor. La tradición conjuntista en la filosofía de la matemática*. Santiago de Chile: Editorial Universitaria, 1998.

Tymoczko, Thomas. "¿Nuevas direcciones en filosofía de la matemática?" Ágora, papeles de filosofía (1997) 16, no. 2: 123-137.

Van Heijenoort, Jean, ed. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge, M.A.: Oxford University Press, 1967.

Von Neumann, John. “El matemático.” En *Sigma: El mundo de las matemáticas*. Volumen 5, editado por James R. Newman, 443-453. Barcelona: Editorial Grijalbo, 1976.

Von Neumann, Johann. “Die formalistische Grundlegung der Mathematik.” *Erkenntnis* 2, (1931): 116-121.

Weyl, Hermann. “El modo matemático de pensar.” En *Sigma: El mundo de las matemáticas*. Volumen 5, editado por James R. Newman, 220-237. Barcelona: Editorial Grijalbo, 1976.

Zermelo, E. “Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann.” *Mathematische Annalen* 59, (1904): 514-516.

Zermelo, E. “Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung.” Mathematische Annalen 65, (1908): 107-128.

Zermelo, Ernest. “Über den Begriff der Definitheit in der Axiomatik.” *Fundamenta Mathematicae* 14, no. 1 (1929): 339-344.

Zermelo, Ernest. “Über Grenzzahlen und Mengenbereiche.” *Fundamenta Mathematicae* 16, no. 1 (1930): 29-47.

Zermelo, E. “Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I.” *Mathematische Annalen* 65, (June 1908): 261-281.